問7–1　解答

1）　ここでは，減衰固有周期を非減衰固有周期とおくことで簡易的に解を求めるものとする．

変位入力を受ける一自由度系の強制振動応答は，式(6.35)より，

$$X_D = \sqrt{\frac{1+\left(2\zeta\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2}{\left\{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right\}^2+\left(2\zeta\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}X_0$$

ここで，$\gamma = \dfrac{\omega}{\omega_n}$ とすると，

$$0.5 > \sqrt{\frac{1+(2\zeta\gamma)^2}{(1-\gamma^2)^2+(2\zeta\gamma)^2}}X_0$$

上式を減衰比ζについて解くと，

$$\zeta > \sqrt{\frac{1-\left(\dfrac{0.5}{X_0}\right)^2(1-\gamma^2)^2}{(2\gamma)^2\left\{\left(\dfrac{0.5}{X_0}\right)^2-1\right\}}}$$

ここで，地動変位$x = X_0\cos\omega t$として，地動加速度を求めると，

$$\dot{x} = -X_0\omega\cos\omega t$$
$$\ddot{x} = -X_0\omega^2\sin\omega t$$

より，加速度振幅X_aは，次のようになる．

$$X_a = X_0\omega^2$$

よって，

$$X_0 = \frac{X_a}{\omega^2} = \frac{X_a}{(2\pi f)^2} = \frac{2.00}{(2\pi\times 0.4)^2} = 0.317$$

次に，

$$\gamma = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{2\pi \cdot f}{2\pi \cdot \frac{1}{T_n}} = \frac{0.4}{\frac{1}{3}} = 1.20$$

以上より，

$$\zeta > \sqrt{\frac{1-\left(\frac{0.5}{X_0}\right)^2\left(1-\gamma^2\right)^2}{\left(2\gamma\right)^2\left\{\left(\frac{0.5}{X_0}\right)^2-1\right\}}} = \sqrt{\frac{1-\left(\frac{0.5}{0.317}\right)^2\left(1-1.20^2\right)^2}{\left(2\times1.20\right)^2\left\{\left(\frac{0.5}{0.317}\right)^2-1\right\}}} = 0.246$$

よって，減衰比$\zeta > 0.246$とすることで免震層の最大応答変位を0.5m 以下にすることができる．

2)　1)と同様に，変位入力を受ける一自由度系の強制振動応答の式(6.35)より，

$$X_D = \sqrt{\frac{1+\left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}{\left\{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right\}^2+\left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}X_0$$

ここで，$\gamma = \frac{\omega}{\omega_n}$，として，$\gamma$を求める．

$$0.5 > \sqrt{\frac{1+(2\zeta\gamma)^2}{(1-\gamma^2)^2+(2\zeta\gamma)^2}}X_0$$

$$\left(\frac{0.5}{X_0}\right)^2\gamma^4+\left\{\left(\frac{0.5}{X_0}\right)^2\left(4\zeta^2-2\right)-4\zeta^2\right\}\gamma^2+\left(\frac{0.5}{X_0}\right)^2-1>0$$

$X_0 = 0.317$，$\zeta = 0.2$を代入し，円振動数比γを求めると，

$$\gamma < 0.631,\quad \gamma > 1.22$$

よって，

$$T_n < \frac{0.631}{f} = \frac{0.631}{0.4} = 1.58\ \text{〔s〕}$$

$$T_n > \frac{1.22}{f} = \frac{1.22}{0.4} = 3.05 \text{〔s〕}$$

以上より，免震層の固有周期は，3.05秒よりも長い周期とするか，1.58秒よりも短い周期とすることで，最大応答変位を0.5m 以内に抑えることができる．

実際の免震層の設計では，免震層の上に設置する上部構造物（建物やサーバーラックなど）に入力される加速度が耐力評価上の観点で重要となる，免震層の周期を短くしていくと，免震層の最大応答変位は小さくなるものの最大応答加速度は大きくなっていくことに注意が必要である．このため，免震層の周期と減衰比の設定には，当該演習問題のような任意の定常波だけでなく，さまざまな入力に対する応答から評価する必要がある．

問7–2　解答

伝達率は，減衰が無視できない場合では式(7.57)，減衰が無視できる場合では式(7.58)から求めることができる．

まず，減衰が無視できない場合，式(7.57)より，

$$\frac{X}{F_0} = \frac{\sqrt{1+\left(2\zeta\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}{\sqrt{\left\{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right\}^2+\left(2\zeta\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

よって，

$$\frac{\sqrt{1+\left(2\zeta\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}{\sqrt{\left\{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right\}^2+\left(2\zeta\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \le \frac{1}{5}$$

$\gamma = \dfrac{\omega}{\omega_n}$，として，$\gamma$を求める．

$$\left(1-\gamma^2\right)^2 + \left(2\zeta\gamma\right)^2 - 25\left\{1+\left(2\zeta\gamma\right)^2\right\} = 0$$

$\zeta = 0.1$を代入して，式を整理すると，

$$\gamma^4 - 2.96\gamma^2 - 24 = 0$$

よって，

$$\gamma^2 = 6.60$$

となる．$\gamma = \dfrac{\omega}{\omega_n}$ より，

$$\frac{\omega}{\omega_n} = \sqrt{6.60}$$

ここで，円振動数ωは，回転数が円振動数と等しいとすると，

$$\omega = 1800 \cdot \frac{2\pi}{60} = 188 \text{〔rad/s〕}$$

より，

$$\omega_n = \frac{188}{\sqrt{6.60}} = 73.2 \text{〔rad/s〕}$$

よって，

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

より，

$$k = 5.36 \times 10^6 \text{〔N/m〕}$$

以上より，伝達率を1/5以下にするためには，ばね定数を5.36 MN/m 以下にする必要がある．
次に，減衰が無視できる場合，先に求めた次式より，減衰比 $\zeta = 0$ とすると，

$$\left(1 - \gamma^2\right)^2 - 25 = 0$$

となる．式を展開して，

$$\gamma^4 - 2\gamma^2 - 24 = 0$$

よって，

$$\gamma^2 = 6.00$$

となる．$\gamma = \dfrac{\omega}{\omega_n}$ より，

$$\frac{\omega}{\omega_n} = \sqrt{6.00}$$

ここで，円振動数 ω は，回転数が円振動数と等しいとすると，

$$\omega = 1800 \cdot \frac{2\pi}{60} = 188 \text{〔rad/s〕}$$

より，

$$\omega_n = \frac{188}{\sqrt{6.00}} = 76.8 \text{〔rad/s〕}$$

よって，

$$k = 5.90 \times 10^6 \text{〔N/m〕}$$

以上より，減衰を無視した場合，伝達率を1/5以下にするためには，ばね定数を5.90MN/m以下にする必要がある．