問6–1　解答

基礎部の円振動数，固有円振動数 ω_n，減衰比ζは以下のとおりである．

$$\omega = 2\pi f = 2\pi 4.00 = 25.1 \text{〔rad/s〕}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1000}{2.00}} = 22.4 \text{〔rad/s〕}$$

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{mk}} = \frac{2.00}{2\sqrt{2.00 \cdot 1000}} = 0.0224$$

したがって，式（6.14）より定常応答の振幅$|x_s|$，振幅倍率$\frac{X_F}{X_{st}}$は以下のとおりである．

$$|x_s| = X_F = \frac{1}{\sqrt{\left(\omega_n^2 - \omega^2\right)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2}} \cdot \frac{F_0}{m}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(22.4^2 - 25.1^2)^2 + (2 \cdot 0.0224 \cdot 22.4 \cdot 25.1)^2}} \cdot \frac{20.0}{2.00} = 0.0765 \text{ [m]}$$

$$\frac{X_F}{X_{st}} = \frac{X_F}{F_0/k} = \frac{0.0765}{20.0/1000} = 3.825$$

また，式（6.15）より位相角は以下のとおりである．

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{2\zeta\omega_n\omega}{\omega_n^2 - \omega^2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2 \cdot 0.0224 \cdot 22.4 \cdot 25.1}{22.4^2 - 25.1^2}\right) = 2.95 \text{〔rad〕}$$

問6–2　解答

i)　式（3.16），（5.20）より，減衰のない場合の固有円振動数ω_n，静たわみ X_{st}，強制振動応答の振幅（最大値）$|x_{s1}|$は以下のとおりである．

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{900}{12.0}} = 8.66 \text{〔rad/s〕}$$

$$X_{st} = \frac{F_0}{k} = \frac{8.00}{900} = 8.89 \times 10^{-3} \text{〔m〕}$$

$$|x_{s1}| = X_F = \left|\frac{X_{st}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right| = \left|\frac{8.89\times 10^{-3}}{1-\left(\frac{9.00}{8.66}\right)^2}\right| = 0.111\ 〔\mathrm{m}〕$$

ii)　式（4.16），（4.17），（6.20）より，減衰比ζ，減衰固有円振動数ω_d，強制振動応答の振幅（最大値）$|x_{s2}|$は以下のとおりである．

$$\zeta = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2\sqrt{mk}} = \frac{50.0}{2\sqrt{12.0\cdot 900}} = 0.241$$

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = 8.66\sqrt{1-0.241^2} = 8.40\ 〔\mathrm{rad/s}〕$$

$$|x_{s2}| = X_F = \frac{1}{\sqrt{\left(\omega_n^2-\omega^2\right)^2+(2\zeta\omega_n\omega)^2}}\cdot\frac{F_0}{m}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(8.66^2-9.00^2)^2+(2\cdot 0.241\cdot 8.66\cdot 9.00)^2}}\cdot\frac{8.00}{12.0} = 0.0175[\mathrm{m}]$$

したがって，ダンパの追加により，振動を0.0175 / 0.111 = 1 / 6.34にできる．

問6–3　解答

式(6.26)より，

$$\zeta = \frac{\frac{\omega_2}{\omega_r} - \frac{\omega_1}{\omega_r}}{2} = \frac{1.05-0.940}{2} = 0.0550$$

問6–4　解答

運動方程式は，

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + k\left(x - x_0\right) = 0$$

となる．式変形して，

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = kx_0$$

ここで，$x = A_0\cos\omega t$ より，運動方程式は，次式のようになる．

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = kA_0 \cos\omega t$$

上式は，式(6.1)で示す減衰のある一自由度系の強制外力による強制振動の運動方程式において，$F = kA_0$ となる場合に相当する．よって，定常応答解 x_s は，式(6.16)より，

$$\begin{cases} x_s = \dfrac{1}{\sqrt{\left(\omega_n^2 - \omega^2\right)^2 + \left(2\zeta\omega_n\omega\right)^2}} \cdot \dfrac{kA_0}{m} \cdot \cos\left(\omega t - \phi\right) \\ \phi = \tan^{-1}\left(\dfrac{2\zeta\omega_n\omega}{\omega_n^2 - \omega^2}\right) \end{cases}$$

定常応答解 x_s を時間で微分することで，応答速度 $\dot{x}_s$ を求める．

$$\dot{x}_s = \frac{-1}{\sqrt{\left(\omega_n^2 - \omega^2\right)^2 + \left(2\zeta\omega_n\omega\right)^2}} \cdot \frac{kA_0}{m} \cdot \omega \sin\left(\omega t - \phi\right)$$

よって，減衰要素から壁に伝達される力の振幅 F_c は，

$$F_c = -c\left|\dot{x}_s\right|_{\max} = \frac{c\omega}{\sqrt{\left(\omega_n^2 - \omega^2\right)^2 + \left(2\zeta\omega_n\omega\right)^2}} \cdot \frac{kA_0}{m}$$

問6–5　解答

運動方程式は，

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + k_1 x + k_2\left(x - x_0\right) = 0$$

式変形して，

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + \left(k_1 + k_2\right)x = k_2 x_0$$

ここで，$x = A_0 \cos\omega t$ より，運動方程式は，次式のようになる．

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + \left(k_1 + k_2\right)x = k_2 A_0 \cos\omega t$$

上式は，式(6.1)で示す減衰のある一自由度系の強制外力による強制振動の運動方程式において，ばね定数 $k = k_1 + k_2$，$F = k_2 A_0$ となる場合に相当する．よって，定常応答解 x_s は，

式(6.16)より，

$$\begin{cases} x_s = \dfrac{1}{\sqrt{\left(\omega_n^2-\omega^2\right)^2+\left(2\zeta\omega_n\omega\right)^2}}\cdot\dfrac{k_2A_0}{m}\cdot\cos\left(\omega t-\phi\right) \\ \phi = \tan^{-1}\left(\dfrac{2\zeta\omega_n\omega}{\omega_n^2-\omega^2}\right) \end{cases}$$

次に，上式の諸定数を求める．

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}} = \sqrt{\frac{3.00\times10^3+6.00\times10^3}{10.0}} = 30.0 \quad \text{〔rad/s〕}$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi\cdot4 = 8\pi = 25.1 \quad \text{〔rad/s〕}$$

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{mk}} = \frac{c}{2\sqrt{m\left(k_1+k_2\right)}} = \frac{300}{2\sqrt{10.0\times\left(3.00\times10^3+6.00\times10^3\right)}} = 0.500$$

$$F_0 = k_2A_0 = 6.00\times10^3\times2.00\times10^{-3} = 12.0 \quad \text{〔N〕}$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{2\zeta\omega_n\omega}{\omega_n^2-\omega^2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2\times0.500\times30.0\times25.1}{30.0^2-25.1^2}\right) = 1.23 \quad \text{〔rad〕}$$

なお，$\omega_n^2-\omega^2>0$ より，第一象限の角度になる．以上より，

$$x_s = 1.5\times10^{-3}\cos\left(25.1t-1.23\right)$$

問6–6　解答

振幅が最大になるときは，共振点での応答を意味する．よって，式(6.42)より共振振動数 ω_r は，

$$\omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}$$

であり，そのときの振幅は，式(6.43)より，

$$\alpha_{\max} = \frac{X_F}{X_{st}} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

となり，

$$X_F = \frac{X_{st}}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

である．
次に振動数が，1/2のときは，

$$\omega_r^{'} = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}\cdot\frac{1}{2}$$

であり，また，式(6.17)より，

$$X_F^{'} = \frac{X_{st}}{\sqrt{\left\{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right\}^2+\left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

となる．上式に，

$$\frac{\omega_r^{'}}{\omega_n} = \frac{1}{2}\sqrt{1-2\zeta^2}$$

を代入して整理すると，

$$X_F^{'} = \frac{X_{st}}{\sqrt{\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\zeta^2\right)+\left(\zeta^2-2\zeta^4\right)}}$$

ここで，$X_{st} = X_F\cdot 2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}$ より，

$$\left(\frac{X_F^{'}}{X_{st}}\right)^2 = \frac{4\zeta^2\left(1-\zeta^2\right)}{\sqrt{\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\zeta^2\right)+\left(\zeta^2-2\zeta^4\right)}}$$

$$\left(\frac{4}{6}\right)^2 = \frac{4\zeta^2\left(1-\zeta^2\right)}{\frac{9}{16}+\frac{7}{4}\zeta^2-\frac{7}{4}\zeta^4}$$

$$\zeta^4-\zeta^2+\frac{9}{116} = 0$$

$$\zeta^2 = \frac{1 \pm 0.831}{2}$$

よって，

$$\zeta = 0.291, 0.957$$

となる．ここで，$\zeta \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ では，共振による極値を持たない．よって，

$$\zeta = 0.291$$

次に，

$$X_{st} = X_F \cdot 2\zeta\sqrt{1-\zeta^2} = 6.00\times10^{-3}\times2\times0.291\times\sqrt{1-0.291^2} = 0.00330 \text{〔m〕}$$

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{X_{st}}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{9.81}{0.0030}} = 8.68 \text{〔Hz〕}$$

問6–7　解答

式(7.43)より，速度の3乗に比例する減衰力の減衰要素が1周期で消費するエネルギーは，$\dot{x} = A\omega\cos\omega t$ より，

$$\begin{aligned}
W &= -\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} F\dot{x}dt = -\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} c\dot{x}^3\cdot\dot{x}dt = -\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} c\dot{x}^4 dt \\
&= -\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} c\left(A\omega\cos\omega t\right)^4 dt = -c\omega^4A^4\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\cos^4\omega t dt \\
&= -c\omega^4A^4\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\left(\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos2\omega t+\frac{1}{8}\cos4\omega t\right)dt \\
&= -c\omega^4A^4\left[\frac{3}{8}t-\frac{1}{4\omega}\sin2\omega t-\frac{1}{32\omega}\sin4\omega t\right]_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \\
&= -c\omega^4A^4\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{2\pi}{\omega} \\
&= -\frac{3}{4}\pi c\omega^3A^4
\end{aligned}$$

この消費エネルギーが式(7.45)と等価になる．よって，

$$|W| = W_d$$

より，

$$\frac{3}{4}\pi c\omega^3 A^4 = \pi c_{eq}\omega A^2$$

以上より，

$$c_{eq} = \frac{3}{4}c\omega^2 A^2$$

問6–8　解答

力入力を受ける振動系の振幅倍率は，式(6.17)より，

$$X_F = \frac{X_{st}}{\sqrt{\left\{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right\}^2 + \left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

となる．よって，次の関係が得られる．

$$\frac{X_{st}}{\sqrt{\left\{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right\}^2 + \left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} = \frac{1}{2}X_{st}$$

ここで，$\gamma = \dfrac{\omega}{\omega_n}$ とすると，

$$\frac{1}{\sqrt{\left(1-\gamma^2\right)^2 + \left(2\zeta\gamma\right)^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\gamma^4 + \left(4\zeta^2 - 2\right)\gamma^2 - 3 = 0$$

ここで，$\zeta = 0.100$ より，

$$\gamma^4 - 2\gamma^2 - 3 = 0$$

よって，

$$\gamma = \frac{\omega}{\omega_n} = \sqrt{3}$$