

第3章 2次関数

演習問題 3.1

$$1. \quad y=2x^2+4x-1=2(x^2+2x+1-1)-1 \\ =2(x+1)^2-3$$

よって、このグラフは $y=2x^2$ のグラフを x 軸方向に -1 、 y 軸方向に -3 だけ平行移動したものである。

$$2. \quad y=ax^2-6ax+b=a(x-3)^2-9a+b$$

$x=3$ (頂点) で最小値 -2 をとり、 $x=5$ で最大値 6 をとるので

$$-9a+b=-2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$-5a+b=6 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\therefore \textcircled{1}, \textcircled{2} \text{より } a=2, b=16$$

演習問題 3.2

1. 与式が重解をもつのは $D=0$ のときであるから

$$\frac{D}{4}=(2-k)^2-k=k^2-5k+4=0$$

$$\therefore k=1, 4$$

2. 解と係数の関係より

$\alpha+\beta=2, \alpha\beta=3$ であるから

$$\textcircled{1} \quad (\alpha-1)(\beta-1)=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1=3-2+1=2$$

$$\textcircled{2} \quad \alpha^2-\alpha\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-3\alpha\beta=2^2-9=-5$$

$$\textcircled{3} \quad \frac{\beta^2}{\alpha} + \frac{\alpha^2}{\beta} = \frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha+\beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)}{\alpha\beta} = \frac{2 \times (-5)}{3} = -\frac{10}{3}$$

3. 2つの解を α, β とすると

$$\alpha=-2, \beta=3 \text{ のとき, } \alpha+\beta=1, \alpha\beta=-6$$

であるから、求める2次方程式は

$$x^2-x-6=0$$

4. 2つの解を $\alpha, \alpha+1$ とおくと、解と係数の関係から、

$$\begin{cases} \alpha+(\alpha+1)=m-1 & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ \alpha(\alpha+1)=m & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

であるから、 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ より

$$2\alpha+1=\alpha(\alpha+1)-1$$

$$\alpha^2-\alpha-2=0$$

$$(\alpha+1)(\alpha-2)=0$$

$$\therefore \alpha=-1, 2$$

$$\alpha=-1 \text{ のとき } m=0, \alpha=2 \text{ のとき } m=6$$

演習問題 3.3

1. ① $(x-1)^2 > 4$

$$x^2 - 2x - 3 > 0$$

$$(x+1)(x-3) > 0$$

 x 軸との交点は

$$x = -1, 3$$

よってグラフより、与式を満足する範囲は

$$x < -1, x > 3$$

② $2x^2 - 3x + 2 > 0$

$$D = 9 - 16 = -7 < 0$$

 x 軸との交点はない。

よってグラフより与式を満足するのは、すべての実数。

③ $x^2 < 16$

$$x^2 - 16 < 0$$

$$(x-4)(x+4) < 0$$

 x 軸との交点は

$$x = -4, 4$$

よってグラフより、与式を満足する範囲は

$$-4 < x < 4$$

④ $x^2 - 14x + 49 \leq 0$

$$(x-7)^2 \leq 0$$

 x 軸との交点は

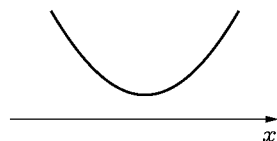
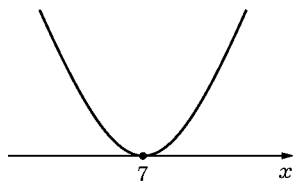
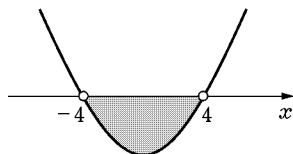
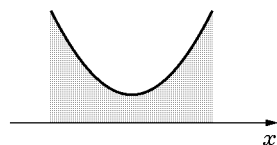
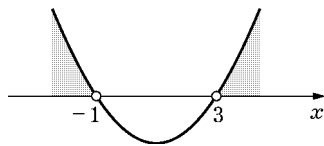
$$x = 7 \text{ (重解)}$$

よってグラフより与式を満足するのは $x = 7$ のみ。

⑤ $x^2 - 2x + 2 < 0$

$$D = 4 - 8 = -4 < 0$$

よってグラフとの交点はない。

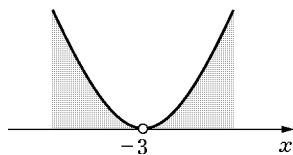
よってグラフより与式を満足する x は存在しない。

⑥ $x^2+6x+9>0$

$$(x+3)^2>0$$

x 軸との交点は $x=-3$ であるが、その点は与式を満足しない。よってグラフより与式を満足するのは、

$x=-3$ 以外のすべての実数



2. $ax^2+bx-6=0$ の解が $-3, 2$ であるから、それらの値を代入すると

$$9a-3b-6=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$4a+2b-6=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②より $a=1, b=1$

よって求める式は

$$x^2+x-6<0$$

章末問題 3

1. ① 求める2次関数を $y=2x^2+ax+b$ とする.

$(0, 3)$ を通るので $b=3 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$

$(1, 4)$ を通るので $2+a+b=4 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$

①, ②より $a=-1, b=3$

$$\therefore y=2x^2-x+3$$

- ② 求める2次関数を $y=ax^2+bx+c$ とする.

$(1, 0)$ を通るので $a+b+c=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$

$(4, 0)$ を通るので $16a+4b+c=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$

$(0, -4)$ を通るので $c=-4 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$

①, ②, ③より $a=-1, b=5, c=-4$

$$\therefore y=-x^2+5x-4$$

2. この2次関数が最大値をもつので、 $a<0$ (上に凸)

$$y=ax^2+2x+4+2a=a\left(x+\frac{1}{a}\right)^2-\frac{1}{a}+4+2a$$

最大値が3であるから

$$-\frac{1}{a}+4+2a=3$$

$$2a^2+a-1=0$$

$$(2a-1)(a+1)=0$$

$$\therefore a=\frac{1}{2}, -1$$

条件より $a<0$ なので $a=-1$

3. $x^2-2x-1=0$ とすると解の公式から $x=1\pm\sqrt{2}$

$$\therefore x^2-2x-1=\{x-(1+\sqrt{2})\}\{x-(1-\sqrt{2})\}=(x-1-\sqrt{2})(x-1+\sqrt{2})$$

4. $a \neq 0$ のとき

$$x = \frac{a+1 \pm \sqrt{(a+1)^2 - 4a}}{2a} = \frac{a+1 \pm (a-1)}{2a} \quad \therefore x=1, \frac{1}{a}$$

$a=0$ のとき $-x+1=0 \quad \therefore x=1$

5. $a \neq 0$ のとき、与式が成立つのは

$$a < 0 \text{ かつ } D < 0$$

$$D = (a-1)^2 - 4a(a-1) = -3a^2 + 2a + 1 < 0$$

$$3a^2 - 2a - 1 > 0$$

$$(3a+1)(a-1) > 0$$

$$\therefore a < -\frac{1}{3}, a > 1$$

条件より $a < 0$ なので

$$a < -\frac{1}{3}$$

6. $x^2 - (a+2)x + 2a < 0$

これを解くと

$$(x-2)(x-a) = 0$$

$$x=2, a$$

グラフより

$$a < 2 \text{ のとき } a < x < 2$$

$$a = 2 \text{ のとき 解なし}$$

$$a > 2 \text{ のとき } 2 < x < a$$

