第６章　三角関数の応用

演習問題６.１

1.　①　$\sin 75^\circ=\sin(30^\circ+45^\circ)=\sin 30^\circ\cos 45^\circ+\cos 30^\circ\sin 45^\circ$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\fallingdotseq 0.966$$

②　$\cos 75^\circ=\cos(30^\circ+45^\circ)=\cos 30^\circ\cdot\cos 45^\circ-\sin 30^\circ\cdot\sin 45^\circ$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\fallingdotseq 0.259$$

③　$\tan 75^\circ=\tan(30^\circ+45^\circ)=\dfrac{\tan 30^\circ+\tan 45^\circ}{1-\tan 30^\circ\cdot\tan 45^\circ}=\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{3}}+1}{1-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot 1}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\fallingdotseq 3.732$

2.　$\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のときは $\alpha=60^\circ$，$\cos\beta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のときは $\beta=45^\circ$ である。

①　$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}=0.966$

②　$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=0.966$

③　$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}\cdot 1}=-3.732$

3.　①　$\sin(2\pi-\theta)=\sin 2\pi\cos\theta-\cos 2\pi\sin\theta=-\sin\theta$

②　$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\dfrac{\pi}{2}\cos\theta+\sin\dfrac{\pi}{2}\sin\theta=\sin\theta$

③　$\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\dfrac{\tan\dfrac{\pi}{2}-\tan\theta}{1+\tan\dfrac{\pi}{2}\tan\theta}$

分子，分母を $\tan\dfrac{\pi}{2}$ で割ると

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{1-\dfrac{\tan\theta}{\tan\dfrac{\pi}{2}}}{\dfrac{1}{\tan\dfrac{\pi}{2}}+\tan\theta}$$

$\tan\dfrac{\pi}{2}$ は ∞ であるため $\dfrac{1}{\tan\dfrac{\pi}{2}}$ は 0 に近い。

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{1}{\tan\theta}=\cot\theta$$

4．三角形の内角の和は 180° であることから

$$\angle A+\angle B=180^\circ-\angle C$$

よって，$\sin(A+B)=\sin(180^\circ-C)$

右辺 $\sin(180^\circ-C)=\sin 180^\circ\cos C-\cos 180^\circ\sin C=\sin C$

よって，$\sin(A+B)=\sin C$ が成立する．

演習問題 6.2

1．正接の加法定理

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$ において，

$\beta=\alpha$ を代入すると

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

2．正弦と余弦の半角の公式について

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$$

上式÷下式を考える．

$$\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\tan^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}\cdot\frac{2}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$

3．① $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より，$\sin\theta=0.6$ ならば，

$$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-0.6^2}=0.8$$

$$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\times0.6\times0.8=0.96$$

② $\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=0.8^2-0.6^2=0.28$

③ $$\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{2\times\frac{0.6}{0.8}}{1-\left(\frac{0.6}{0.8}\right)^2}=\frac{1.5}{0.4375}=3.43$$

4．① $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より，$\sin\theta=0.8$ ならば，

$$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-0.8^2}=0.6$$

$$\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{2}=\frac{1-0.6}{2}=0.2$$

② $$\cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{1+\cos\theta}{2}=\frac{1+0.6}{2}=0.8$$

③　$\tan^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}=\dfrac{1-0.6}{1+0.6}=0.25$

5．①　$e_1+e_2=\sqrt{3}\sin\omega t+\sin\left(\omega t+\dfrac{\pi}{2}\right)=\sqrt{3}\sin\omega t+\cos\omega t$

式(6.10)より

$e_1+e_2=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}\sin(\omega t+\phi)$

ここで，$\phi=\tan^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ より $\phi=\dfrac{\pi}{6}$〔rad〕

よって，$e_1+e_2=2\sin\left(\omega t+\dfrac{\pi}{6}\right)$〔V〕

②　上式は，$\omega t+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$，つまり $\omega t=\dfrac{\pi}{3}$〔rad〕のとき最大値 2 V，$\omega t+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{3}{2}\pi$，つまり $\omega t=\dfrac{4}{3}\pi$〔rad〕のとき最小値－2 V となる．

章末問題 6

1．①　$\sin 105^\circ=\sin(60^\circ+45^\circ)=\sin 60^\circ\cdot\cos 45^\circ+\cos 60^\circ\cdot\sin 45^\circ$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}\fallingdotseq 0.966$

②　$\cos 105^\circ=\cos(60^\circ+45^\circ)=\cos 60^\circ\cdot\cos 45^\circ-\sin 60^\circ\sin 45^\circ$

$=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}\fallingdotseq -0.259$

③　$\tan 105^\circ=\tan(60^\circ+45^\circ)=\dfrac{\tan 60^\circ+\tan 45^\circ}{1-\tan 60^\circ\cdot\tan 45^\circ}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}\cdot 1}\fallingdotseq -3.732$

2．$e_1+e_2=20\sin\omega t+20\sin\left(\omega t-\dfrac{1}{3}\pi\right)$

$=20\sin\omega t+20\left(\sin\omega t\cos\dfrac{\pi}{3}-\sin\dfrac{\pi}{3}\cos\omega t\right)$

$=20\sin\omega t+20\left(\dfrac{1}{2}\sin\omega t-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\omega t\right)=30\sin\omega t-10\sqrt{3}\cos\omega t$

$=\sqrt{30^2+(-10\sqrt{3})^2}\sin(\omega t+\phi)$

ここで，$\phi=\tan^{-1}\dfrac{-10\sqrt{3}}{30}=-\dfrac{\pi}{6}$ より

$e_1+e_2=20\sqrt{3}\sin\left(\omega t-\dfrac{\pi}{6}\right)$〔V〕

3．①　$y=\sqrt{1^2+1^2}\sin(\omega t+\phi)$

ここで，$\phi=\tan^{-1}\dfrac{1}{1}=\dfrac{\pi}{4}$ より

$$y=\sqrt{2}\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{4}\right)$$

② ①より，

$$y=\sqrt{2}\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(\sin\omega t\cos\frac{\pi}{4}+\cos\omega t\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$\sin\dfrac{\pi}{4}=\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ より

$$y=\sqrt{2}\left(\sin\omega t\sin\frac{\pi}{4}+\cos\omega t\cos\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{4}\right)$$

③ $x=\dfrac{1}{2}\{(\sin\omega t+\cos\omega t)^2-(\sin^2\omega t+\cos^2\omega t)\}=\dfrac{1}{2}\{(0.5)^2-1\}=-0.375$

4. $\cos 2\omega t=\cos^2\omega t-\sin^2\omega t=(1-\sin^2\omega t)-\sin^2\omega t=1-2\sin^2\omega t$

$y=-2\sin^2\omega t+4\sin\omega t+2$

ここで，$x=\sin\omega t$ とおくと，

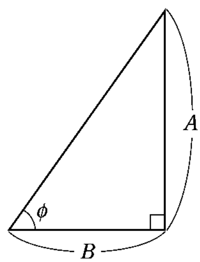
$y=-2x^2+4x+2=-2(x-1)^2+4$

$-1\leqq x\leqq 1$ であるから，

$\sin\omega t=1$ のとき最大値 $y=4$

$\sin\omega t=-1$ のとき最小値 $y=-4$

5. 図の三角形において次式が成立する.



$$\begin{cases}A=\sqrt{A^2+B^2}\cos\phi\\ B=\sqrt{A^2+B^2}\sin\phi\end{cases}$$

よって，

$A\cos\theta-B\sin\theta=\sqrt{A^2+B^2}(\cos\theta\cos\phi-\sin\theta\sin\phi)$

また，余弦の加法定理

$\cos(\theta+\phi)=\cos\theta\cos\phi-\sin\theta\sin\phi$ より，

$A\cos\theta-B\sin\theta=\sqrt{A^2+B^2}\cos(\theta+\phi)$

6. $\sin 3\theta=\sin(2\theta+\theta)=\sin 2\theta\cos\theta+\cos 2\theta\sin\theta$

$\quad=(2\sin\theta\cos\theta)\cos\theta+(1-2\sin^2\theta)\sin\theta$

$\quad=2\sin\theta(1-\sin^2\theta)+(1-2\sin^2\theta)\sin\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$