第 11 章　積分の基本

演習問題 11.1

1.　①　$\int (x+2)(x+5)dx=\int x^2+7x+10dx=\frac{1}{3}x^3+\frac{7}{2}x^2+10x+C$

②　$\int \left(\frac{2\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}}\right)dx=\int 2-5x^{-\frac{1}{2}}dx=2x-10\sqrt{x}+C$

③　$t=\frac{2}{3}x-\frac{1}{4}$ とおくと $dt=\frac{2}{3}dx$

$$\int \left(\frac{2}{3}x-\frac{1}{4}\right)^5 dx=\int t^5\cdot\frac{3}{2}dt=\frac{1}{4}t^6+C=\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}x-\frac{1}{4}\right)^6+C$$

④　式(6.12)より $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$

$$\int 2\cos^2 x dx=\int (1+\cos 2x)dx=x+\frac{1}{2}\sin 2x+C$$

⑤　$t=\varepsilon^x+1$ とおくと $dt=\varepsilon^x dx$ より $dx=\frac{1}{\varepsilon^x}dt$，$\varepsilon^x=t-1$

$$\int \frac{\varepsilon^{2x}}{\sqrt{\varepsilon^x+1}}dx=\int \frac{t-1}{\sqrt{t}}dt=\int t^{\frac{1}{2}}-t^{-\frac{1}{2}}dt=\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}-2t^{\frac{1}{2}}+C=\frac{2}{3}(\varepsilon^x+1)^{\frac{3}{2}}-2(\varepsilon^x+1)^{\frac{1}{2}}+C$$

⑥　式(6.13)より $\sin x\cos 3x=\frac{1}{2}(\sin 4x-\sin 2x)$

$$\int \sin x\cos 3x dx=\int \frac{1}{2}(\sin 4x-\sin 2x)dx=-\frac{1}{8}\cos 4x+\frac{1}{4}\cos 2x+C$$

2.　①　$t=ax+b$ とおき，右辺を x で微分すると

$$\left\{\frac{F(ax+b)}{a}\right\}'=\frac{1}{a}\frac{dF(t)}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=F'(t)=f(ax+b)$$

②　$f(x)=t$ とおき，$f'(x)dx=dt$ を代入する．

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int \frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln|f(x)|+C$$

③　$f(x)=t$ とおくと $f'(x)dx=dt$

$$\int \{f(x)\}^n f'(x)dx=\int t^n dt=\frac{t^{n+1}}{n+1}+C=\frac{\{f(x)\}^{n+1}}{n+1}+C$$

3.　①　$t=\sqrt{x+2}$ とおくと $dt=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x+2}}dx=\frac{1}{2t}dx$，$x=t^2-2$ から

$$\int (2x+1)\sqrt{x+2}dx=\int \{2(t^2-2)+1\}\cdot t\cdot 2tdt=\int 4t^4-6t^2dt$$

$$=\frac{4}{5}(x+2)^{\frac{5}{2}}-2(x+2)^{\frac{3}{2}}+C$$

②　$\int \frac{x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int \frac{(x^2+1)'}{(x^2+1)}dx=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$

③　$t=\sin x$ とおくと $dt=\cos x dx$

$$\int \cos x \sin^4 x dx=\int t^4 dt=\frac{1}{5}t^5+C=\frac{1}{5}\sin^5 x+C$$

④　$$\int \frac{\ln x}{x}dx=\int \ln x(\ln x)' dx=\frac{1}{2}(\ln x)^2+C$$

演習問題 11.2

1.　①　$$\int x\varepsilon^{-ax}dx=\int\left(-\frac{1}{a}\varepsilon^{-ax}\right)' x dx=-\frac{x}{a}\varepsilon^{-ax}+\frac{1}{a}\int \varepsilon^{-ax}dx$$

$$=-\frac{x}{a}\varepsilon^{-ax}-\frac{1}{a^2}\varepsilon^{-ax}+C=-\frac{1}{a}\left(x+\frac{1}{a}\right)\varepsilon^{-ax}+C$$

②　$$\int x\ln x dx=\int\left(\frac{1}{2}x^2\right)'\ln x dx=\frac{1}{2}x^2\ln x-\int\frac{1}{2}x^2\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{1}{2}x^2\left(\ln x-\frac{1}{2}\right)+C$$

③　$$\int \varepsilon^x \cos x dx=\int(\varepsilon^x)'\cos x dx=\varepsilon^x\cos x+\int\varepsilon^x\sin x dx$$

$$=\varepsilon^x\cos x+\int(\varepsilon^x)'\sin x dx=\varepsilon^x(\cos x+\sin x)-\int\varepsilon^x\cos x dx$$

$$\int \varepsilon^x\cos x dx=\frac{1}{2}\varepsilon^x(\cos x+\sin x)+C$$

2.　①　$$\frac{x^2-2x+3}{(x+1)(x^2+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$$

部分分数分解により，$A=3$，$B=-2$，$C=0$.

$$\int\frac{1}{(x+1)(x^2+1)}dx=\int\frac{3}{x+1}-\frac{2x}{x^2+1}dx=3\ln|x+1|-\ln(x^2+1)+C$$

$$=\ln\frac{|x+1|^3}{x^2+1}+C$$

②　$t=2x-1$ とおくと　$dt=2dx$

$$\int\frac{x-1}{(2x-1)^3}dx=\int\frac{(t-1)}{2t^3}\cdot\frac{1}{2}dt=\frac{1}{4}\int t^{-2}-t^{-3}dt=-\frac{1}{4}t^{-1}+\frac{1}{8}t^{-2}+C$$

$$=\frac{1}{8}\cdot\frac{(-4x+3)}{(2x-1)^2}+C$$

章末問題 11

1.　①　$$\int\sin^2 x dx=\int\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}+C$$

②　$t=\varepsilon^x$ とおくと $dt=\varepsilon^x dx$ より

$$\int\frac{\varepsilon^x}{\varepsilon^x+1}dx=\int\frac{1}{t+1}dt=\ln|t+1|+C=\ln(\varepsilon^x+1)+C$$

③ $\displaystyle\int\left(\frac{2}{x^2}+\frac{3}{2x^4}+\frac{3}{x}\right)dx=\int\left(2x^{-2}+\frac{3}{2}x^{-4}+3x^{-1}\right)dx$

$$=-2x^{-1}-\frac{1}{2}x^{-3}+3\ln|x|+C=-\frac{2}{x}-\frac{1}{2x^3}+3\ln|x|+C$$

④ $(a^x)'=a^x\ln a$ より $\displaystyle\int a^x dx=\frac{1}{\ln a}a^x+C$

$\displaystyle\int 3\varepsilon^x+2^x dx=3\varepsilon^x+\frac{1}{\ln 2}2^x+C$

⑤ 部分積分で $f'=\sin(3x+5)g=(x+1)$ とすると

$$\int(x+1)\sin(3x+5)dx=\int\left\{-\frac{1}{3}\cos(3x+5)\right\}'(x+1)dx$$

$$=-\frac{1}{3}(x+1)\cos(3x+5)-\int-\frac{1}{3}\cos(3x+5)\cdot 1dx$$

$$=-\frac{1}{3}(x+1)\cos(3x+5)+\frac{1}{9}\sin(3x+5)+C$$

⑥ $f'=1$ ，$g=\ln x$ とすると

$$\int 1\cdot\ln xdx=\int(x)'\ln xdx=x\ln x-\int x\cdot\frac{1}{x}dx=x(\ln x-1)+C$$

⑦ $\displaystyle\int\cos 3x\cos 2xdx=\frac{1}{2}\int(\cos 5x+\cos x)dx=\frac{1}{10}\sin 5x+\frac{1}{2}\sin x+C$

⑧ $\displaystyle\frac{1}{x^2-a^2}=-\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x-a}\right)$ より

$$\int\frac{1}{x^2-a^2}dx=-\frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x-a}\right)dx=\frac{1}{2a}(\ln|x+a|-\ln|x-a|)+C$$

$$=-\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right|+C$$

2．① $t=\sin x$ とおくと $dt=\cos xdx$，$\cos^2 x=1-t^2$ より

$$\int\frac{1}{\cos x}dx=\int\frac{1}{\cos x}\frac{1}{\cos x}dt=\int\frac{1}{1-t^2}dt=\int\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)dt$$

$$=-\frac{1}{2}\ln|1-t|+\frac{1}{2}\ln|1+t|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right)+C$$

② $x=a\sin t$ とおくと $dx=a\cos tdt$，$\sqrt{a^2-x^2}=a\cos t$ より

$$\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\int\frac{1}{a\cos t}\cdot a\cos tdt=\int dt=t+C$$

$t=\sin^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right)$ から

$$\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+C$$

③ $x=a\sin t$ とおくと $dx=a\cos t dt$ より

$$\int\frac{1}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}dx=\int\frac{1}{a^3\cos^3 t}a\cos t dt=\int\frac{1}{a^2\cos^2 t}dt=\frac{1}{a^2}\tan t+C$$

$\tan t=\dfrac{\sin t}{\cos t}=\dfrac{\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}$ から

$$\int\frac{1}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}dx=\frac{1}{a^2}\frac{\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}+C=\frac{1}{a^2}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}+C$$

④ $x=a\tan t$ とおくと $dx=\dfrac{a}{\cos^2 t}dt$，$a^2+x^2=\dfrac{a^2}{\cos^2 t}$ より

$$\int\frac{1}{a^2+x^2}dx=\int\frac{\cos^2 t}{a^2}\cdot\frac{a}{\cos^2 t}dt=\frac{1}{a}\int dt=\frac{1}{a}t+C$$

$t=\tan^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right)$ より

$$\int\frac{1}{a^2+x^2}dx=\frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+C$$

⑤ $x=a\sin t$ とおくと $dx=a\cos t dt$ より

$$\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\int a\cos t\cdot a\cos t dt=a^2\int\cos^2 t dt=\frac{a^2}{2}\int(1+\cos 2t)dt$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C=\frac{a^2}{2}(t+\sin t\cos t)+C$$

$t=\sin^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right)$，$\cos t=\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{a}\right)^2}$ から

$$\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{a^2}{2}\left(\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+\frac{x}{a}\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\right)+C$$

$$=\frac{1}{2}\left(a^2\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+x\sqrt{a^2-x^2}\right)+C$$

⑥ $\sqrt{x^2+a}=t-x$ とおくと，両辺を 2 乗して x を求めると

$x=\dfrac{t^2-a}{2t}$，$\sqrt{x^2+a}=t-x=\dfrac{t^2+a}{2t}$，$dx=\dfrac{t^2+a}{2t^2}dt$ より

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2+a}}dx=\int\frac{2t}{t^2+a}\cdot\frac{t^2+a}{2t^2}dt=\int\frac{1}{t}dt=\ln|t|+C=\ln|x+\sqrt{x^2+a}|+C$$

⑦ $I=\displaystyle\int\sqrt{x^2+a}\,dx=\int(x)'\sqrt{x^2+a}\,dx=x\sqrt{x^2+a}-\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+a}}dx$

$$=x\sqrt{x^2+a}-\int\frac{(x^2+a)-a}{\sqrt{x^2+a}}dx$$

$$=x\sqrt{x^2+a}-\int\sqrt{x^2+a}\,dx+a\int\frac{1}{\sqrt{x^2+a}}dx$$

⑥の結果を利用すると

$$I=x\sqrt{x^2+a}-I+a\ \ln|x+\sqrt{x^2+a}|+C$$

$$I=\frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+a}+a\ \ln|x+\sqrt{x^2+a}|+C$$