第 12 章　積分の応用

演習問題 12.1

1．①　$\displaystyle\int_1^2 (x^2+1)dx=\left[\frac{1}{3}x^3+2x\right]_1^2=\frac{13}{3}$

②　$\displaystyle\int_1^2 \left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)dx=\left[-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}\right]_1^2=\frac{7}{8}$

③　$\displaystyle\int_1^3 \frac{(x^2-1)^2}{x^4}dx=\int_1^3 \frac{(x^4-2x^2+1)}{x^4}dx=\int_1^3 \left(1-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)dx$

$\displaystyle=\left[x+\frac{2}{x}-\frac{1}{3x^3}\right]_1^3=\frac{80}{81}$

④　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2x}{2}dx=\left[\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$

⑤　$t=\sqrt{x+a}$ とおくと $\displaystyle dt=\frac{1}{2\sqrt{x+a}}dx=\frac{1}{2t}dx$，$x=t^2-a$

$-a\leqq x\leqq a$ に対して $0\leqq t\leqq\sqrt{2a}$ なので

$\displaystyle\int_{-a}^a x\sqrt{x+a}\,dx=\int_0^{\sqrt{2a}} (t^2-a)t\cdot 2tdt=\int_0^{\sqrt{2a}} (2t^4-2at^2)dt$

$\displaystyle=\left[\frac{2}{5}t^5-\frac{2a}{3}t^3\right]_0^{\sqrt{2a}}=\frac{4\sqrt{2}}{15}\sqrt{a^5}$

⑥　$\displaystyle\int_0^\infty x\varepsilon^{-ax}dx=\int_0^\infty \left(-\frac{1}{a}\varepsilon^{-ax}\right)'xdx=\left[-\frac{1}{a}\varepsilon^{-ax}\cdot x\right]_0^\infty+\frac{1}{a}\int_0^\infty \varepsilon^{-ax}dx$

$\displaystyle=\left[-\frac{1}{a}\varepsilon^{-ax}\cdot x-\frac{1}{a^2}\varepsilon^{-ax}\right]_0^\infty=\frac{1}{a^2}$

⑦　$\displaystyle I=\int_0^\infty \varepsilon^{-ax}\cos bxdx=\int_0^\infty \left(-\frac{1}{a}\varepsilon^{-ax}\right)'\cos bxdx$

$\displaystyle=\left[-\frac{1}{a}\varepsilon^{-ax}\cos bx\right]_0^\infty+\int\frac{1}{a}\varepsilon^{-ax}(-b\sin bx)dx$

$\displaystyle=\frac{1}{a}-\frac{b}{a}\int_0^\infty \left(-\frac{1}{a}\varepsilon^{-ax}\right)'\sin bxdx$

$\displaystyle=\frac{1}{a}-\frac{b}{a}\left\{\left[-\frac{1}{a}\varepsilon^{-ax}\sin bx\right]_0^\infty-\int_0^\infty \left(-\frac{1}{a}\varepsilon^{-ax}\right)b\cos bxdx\right\}$

$\displaystyle=\frac{1}{a}-\frac{b^2}{a^2}I\qquad\therefore\quad I=\frac{a}{a^2+b^2}$

⑧　$\displaystyle I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)'\cos^2 xdx$

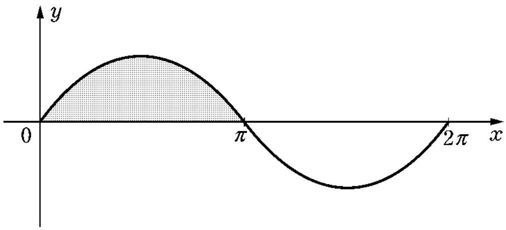
$\displaystyle=[\sin x\cos^2 x]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x(-2\sin x\cos x)dx$

$\displaystyle=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin^2 x\cos xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2(1-\cos^2 x)\cos xdx$

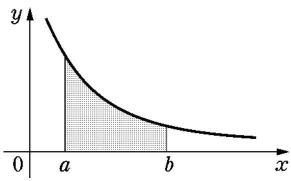
$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 x dx=2-2I$$

$$\therefore\quad I=\frac{2}{3}$$

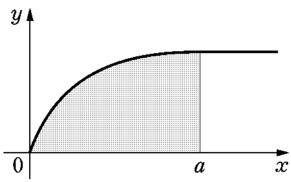
2. ① $\displaystyle\int_0^{\pi}\sin x dx=[-\cos x]_0^{\pi}=2$



② $\displaystyle\int_a^b\frac{1}{x}dx=[\ln x]_a^b=\ln\frac{b}{a}$



③ $\displaystyle\int_0^a(1-\varepsilon^{-x})dx=[x+\varepsilon^{-x}]_0^a=a+\varepsilon^{-a}-1$



演習問題 12.2

1. $\theta=\omega t$ とおく．対称性から $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の範囲を考えるだけでよい．$i=\dfrac{2I_m}{\pi}\theta$ なので，

$$平均値=\frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}\right)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}id\theta=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2I_m}{\pi}\theta d\theta=\frac{4}{\pi^2}I_m\left[\frac{1}{2}\theta^2\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{I_m}{2}$$

$$実効値=\sqrt{\frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}\right)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}i^2d\theta}=\sqrt{\frac{2}{\pi}\cdot\frac{4I_m{}^2}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta^2d\theta}=\sqrt{\frac{8I_m{}^2}{\pi^3}\left[\frac{\theta^3}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}}=\frac{I_m}{\sqrt{3}}$$

2.　内球に電荷 Q を与える．導体球間の電位差は

$$V=\int_a^b \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}dr=\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$

となる．したがって

$$Q=\frac{4\pi\varepsilon V}{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}$$

である．ガウスの法則 $E=\frac{Q}{4\pi r^2}$ に Q を代入して

$$E(r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon r^2}\frac{4\pi\varepsilon V}{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}=\frac{abV}{r^2(b-a)}$$

になる．内球の表面の電界は $r=a$ なので

$$E(a)=\frac{bV}{a(b-a)}$$

を得る．$E(a)$ を最小にするためには分母が最大になればよい．
$f(a)=a(b-a)$ とおくと

$$f'(a)=b-2a=0$$

より $a=\frac{b}{2}$ のとき，最大値 $f\left(\frac{b}{2}\right)=\frac{b^2}{4}$

したがって $a=\frac{b}{2}$ のとき内球の表面の電界の強さは最小になる．

3.　$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$ から

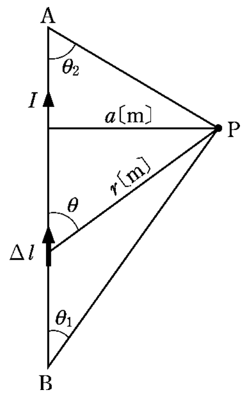
$$V=\int_a^b \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}dr=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}[\ln r]_a^b=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{b}{a}$$

4.　導線上の微小部分と $\triangle l$ とし，導線と点 P 方向とのなす角度を θ とするとビオ・サバールの法則より求める．

$$\triangle H=\frac{I\triangle l\sin\theta}{4\pi r^2}\text{〔A/m〕}$$

である．l を 0 から $\overline{AB}$ まで積分すれば H が求まるが，l が変化すると θ も変化する．そこで θ のみの変数にする．

$$\triangle l=\frac{r}{\sin\theta}\triangle\theta$$ を $\triangle H$ に代入して



$\triangle H=\dfrac{I}{4\pi r^2}\cdot\dfrac{r}{\sin\theta}\triangle\theta\sin\theta=\dfrac{I\triangle\theta}{4\pi r}$

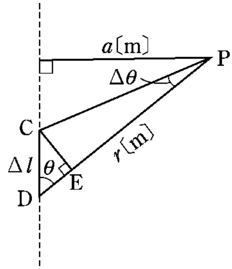
となる．$\dfrac{a}{r}=\sin\theta$ より $r=\dfrac{a}{\sin\theta}$ を代入して

$\triangle H=\dfrac{I\sin\theta}{4\pi a}\triangle\theta$

を得る．$\theta_1\leqq\theta\leqq(\pi-\theta_2)$ で積分すると

$H=\displaystyle\int_{\theta_1}^{\pi-\theta_2}\frac{I\sin\theta}{4\pi a}d\theta=\frac{I}{4\pi a}[-\cos\theta]_{\theta_1}^{\pi-\theta_2}$

$=\dfrac{I}{4\pi a}(\cos\theta_1+\cos\theta_2)$〔A/m〕



Δlを拡大したもの

章末問題 12

1．① $\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$ より

$\sin mx\sin nx=\dfrac{1}{2}\{\cos(m+n)x-\cos(m-n)x\}$

$m\neq n$ のとき $\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin nx\cos nxdx=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\{\cos(m+n)x-\cos(m-n)x\}dx$

$=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{m+n}\sin(m+n)x-\dfrac{1}{m-n}\sin(m-n)x\right]_0^{2\pi}=0$

$m=n$ のとき $\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin mx\sin nxdx=\int_0^{2\pi}\sin^2 mxdx=\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2mx}{2}dx$

$=\dfrac{1}{2}\left[x-\dfrac{1}{2m}\sin 2mx\right]_0^{2\pi}=\pi$

$m\neq n$ のとき 0，$m=n$ のとき π

② $\sin mx\cos nx=\dfrac{1}{2}\{\sin(m+n)x+\sin(m-n)x\}$

$m\neq n$ のとき $\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin mx\cos nxdx=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\{\sin(m+n)x+\sin(m-n)x\}dx$

$=\dfrac{1}{2}\left[-\dfrac{1}{m+n}\cos(m+n)x-\dfrac{1}{m-n}\cos(m-n)x\right]_0^{2\pi}=0$

$m=n$ のとき $\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin mx\cos nxdx=\int_0^{2\pi}\sin mx\cos mxdx=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\sin 2mxdx$

$=\left[-\dfrac{1}{4m}\cos 2mx\right]_0^{2\pi}=0$

常に 0

③　$\cos mx \cos nx = \dfrac{1}{2}\{\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\}$

$m \neq n$ のとき $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\{\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\}dx$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{m+n}\sin(m+n)x - \frac{1}{m-n}\sin(m-n)x\right]_0^{2\pi} = 0$$

$m = n$ のとき $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx dx = \int_0^{2\pi}\cos^2 mx dx = \int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2mx}{2}dx$

$$= \frac{1}{2}\left[x + \frac{1}{2m}\sin 2mx\right]_0^{2\pi} = \pi$$

$m \neq n$ のとき 0，$m = n$ のとき π

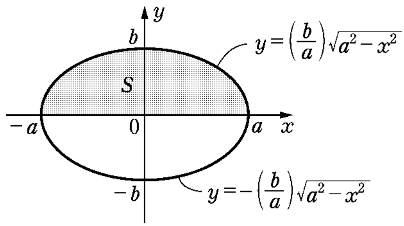
2．$\left(\dfrac{x}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{b}\right)^2 = 1$ を y について解くと

$$y = \pm b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \pm\left(\frac{b}{a}\right)\sqrt{a^2 - x^2}$$

$$S = 2\int_{-a}^{a}\left(\frac{b}{a}\right)\sqrt{a^2 - x^2}dx$$

例題 12.4 ③を用いると

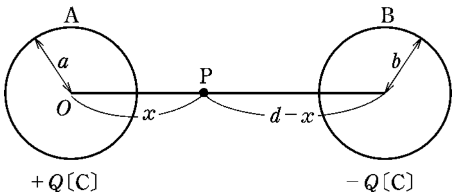
$$S = 2\left(\frac{b}{a}\right)\cdot\frac{\pi a^2}{2} = \pi ab$$



3．球 A と球 B の中心を結ぶ直線上のある点を P とし，球 A の中心からの距離を x〔m〕とする

球 A の電荷による点 P への電界は

$$E_{AP} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon x^2}〔\mathrm{V/m}〕$$



球 B の電荷による点 P の電界は

$$E_{BP} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon(d-x)^2}〔\mathrm{V/m}〕$$

よって点 P の電界は

$$E_P = E_{AP} + E_{BP} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left\{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(d-x)^2}\right\}〔\mathrm{V/m}〕$$

球 A の中心を原点にとると，両球間の電位差は

$$V = \int_a^{d-b} E_P dx = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\int_a^{d-b}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(d-x)^2}\right)dx = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left\{\left[-\frac{1}{x}\right]_a^{d-b} + \left[\frac{1}{d-x}\right]_a^{d-b}\right\}$$

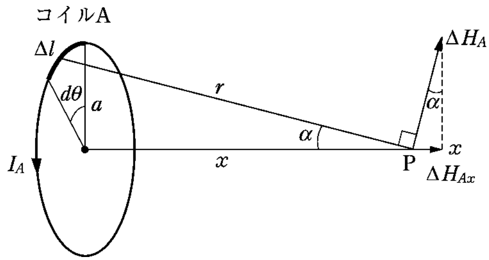
$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{d-b} + \frac{1}{b} - \frac{1}{d-a}\right)〔\mathrm{V}〕$$

$d \gg a$，$d \gg b$ なので $\dfrac{1}{a}$，$\dfrac{1}{b} \gg \dfrac{1}{d-b}$，$\dfrac{1}{d-a}$

$$V=\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$$

$C=\dfrac{Q}{V}$ より $C=\dfrac{4\pi\varepsilon}{\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)}$〔F〕

4．



ビオ・サバールの法則よりコイル A の電流によって生じる磁界$\triangle H_A$ は

$$\triangle H_A=\frac{I_A\triangle l}{4\pi r^2}\text{〔A/m〕}$$

コイル A から法線方向を x 方向とすると

$$\triangle H_{Ax}=\frac{I_A\triangle l}{4\pi r^2}\sin\alpha=\frac{I_A\triangle l}{4\pi r^2}\,\frac{a}{r}\text{〔A/m〕}$$

ただし $r=\sqrt{x^2+a^2}$ である．微小部分を 1 周すると$\triangle H$ は x 成分のみになるので

$$H_{Ax}=\int\triangle H_{Ax}=\int_0^{2\pi a}\frac{I_A}{4\pi r^2}\,\frac{a}{r}dl=\frac{I_A}{4\pi r^2}\,\frac{a}{r}\cdot 2\pi a=\frac{I_Aa^2}{2r^3}=\frac{I_Aa^2}{2\sqrt{(x^2+a^2)^3}}\text{〔A/m〕}$$

コイル B の電流から生じる点 P の磁界 H_B も x 成分だけ考えてよい．ただし電流を逆方向に流すため

$$H_{Bx}=-\frac{I_Bb^2}{2\sqrt{(d-x)^2+b^2}}\text{〔A/m〕}$$

を得る．したがって

$$H_x=\frac{1}{2}\left\{\frac{I_Aa^2}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}-\frac{I_Bb^2}{\sqrt{(d-x)^2+b^2}}\right\}\text{〔A/m〕}$$