第 1 章　数式の計算

演習問題 1.1

1．　①　$\sqrt{125}+\sqrt{20}-\sqrt{45}=5\sqrt{5}+2\sqrt{5}-3\sqrt{5}=4\sqrt{5}$

②　$\dfrac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\dfrac{(2\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=-1+\sqrt{6}$

2．　$x+y=\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=2\sqrt{3}$

$xy=\dfrac{1}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=1$

①　$x^2+xy+y^2=(x+y)^2-xy=(2\sqrt{3})^2-1=11$

②　$\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}=\dfrac{y^2+x^2}{xy}=\dfrac{(x+y)^2-2xy}{xy}=10$

演習問題 1.2

1．　3 次式，3 項式，係数は 1，3，-2

（なお x については 2 次，3 項式で，係数は a^2，$3y$，$-2y^3$，y については 3 次 3 項式で，係数は a^2x，$3x^2$，-2）

2．　①　$P+Q=x^3+x^2-x-5$　　②　$P-Q=x^3-x^2-5x-3$

③　$2P+3Q=2x^3+3x^2-11$

④　$P\times Q=x^5+2x^4-4x^3-10x^2-5x+4$

⑤　$P\div Q=x-2$，余り $2x-6$

3．　①　$(a+b)(a^2+b^2)(a-b)=(a^2-b^2)(a^2+b^2)=a^4-b^4$

②　$(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$

$=\{(a^2+b^2)+ab\}\{(a^2+b^2)-ab\}$

$=(a^2+b^2)^2-a^2b^2=a^4+2a^2b^2+b^4-a^2b^2=a^4+a^2b^2+b^4$

③　$(x+1)^2(x-1)^2=\{(x+1)(x-1)\}^2=(x^2-1)^2=x^4-2x^2+1$

④　$(x-3)(x+5)=x^2+2x-15$

⑤　$(2x+3)(x-5)=2x^2-7x-15$

4．　①　$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$

$=a^2b-a^2c+b^2c-b^2a+c^2a-c^2b$

$=(b-c)a^2-(b^2-c^2)a+b^2c-c^2b$

$=(b-c)a^2-(b-c)(b+c)a+bc(b-c)$

$=(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}$

$=(b-c)(a-b)(a-c)$

$=-(a-b)(b-c)(c-a)$

② $4x^3+12x^2y+9xy^2$
$=x(4x^2+12xy+9y^2)$
$=x(2x+3y)^2$

③ $6x^2-x-2=(2x+1)(3x-2)$

$$\begin{array}{cccc} 2 & \times & +1 & +3 \\ 3 & & -2 & -4 \\ \hline 6 & & -2 & -1 \end{array}$$

④ $x(x-a)+2(a-2)$
$=x^2-ax+2a-4$
$=x^2-ax+2(a-2)=(x-2)(x-a+2)$

$$\begin{array}{cccc} 1 & \times & -2 & -2 \\ 1 & & -(a-2) & -(a-2) \\ \hline 1 & & +2(a-2) & -a \end{array}$$

⑤ $(x^2+3x)^2-2(x^2+3x)-8$
$=\{(x^2+3x)+2\}\{(x^2+3x)-4\}$
$=(x^2+3x+2)(x^2+3x-4)$
$=(x+1)(x+2)(x-1)(x+4)$

5. $P(x)=2x^3+ax^2+bx$ 3 とすると
剰余定理より
$P(1)=2+a+b+3=0$
$P(-2)=-16+4a-2b+3=-9$
よって $a+b=-5$……①
$4a-2b=4$……②
①，②より $a=-1$，$b=-4$
∴ $P(x)=2x^3-x^2-4x+3$

演習問題 1.3

1. ① $\dfrac{1+\dfrac{a+b}{a-b}}{1-\dfrac{a+b}{a-b}}=\dfrac{\dfrac{2a}{a-b}}{-\dfrac{2b}{a-b}}=-\dfrac{a}{b}$

② $\dfrac{\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}}{\dfrac{a+b}{a-b}+\dfrac{a-b}{a+b}}=\dfrac{\dfrac{4ab}{a^2-b^2}}{\dfrac{2(a^2+b^2)}{a^2-b^2}}=\dfrac{2ab}{a^2+b^2}$

2. $\dfrac{x-2}{x^2-1}-\dfrac{x-5}{x^2-3x+2}=\dfrac{x-2}{(x-1)(x+1)}-\dfrac{x-5}{(x-1)(x-2)}$

$=\dfrac{(x-2)^2-(x-5)(x+1)}{(x-1)(x+1)(x-2)}=\dfrac{9}{(x-1)(x+1)(x-2)}$

3. $\dfrac{2}{x^2-1}=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{x+1}$ とおくと

$\dfrac{2}{x^2-1}=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{x+1}=\dfrac{a(x+1)+b(x-1)}{(x-1)(x+1)}$

$=\dfrac{(a+b)x+(a-b)}{(x-1)(x+1)}$

分子の係数を比較すると　$a+b=0$……①

$a-b=2$……②

①，②より $a=1$，$b=-1$

よって $\dfrac{2}{x^2-1}=\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}$

章末問題 1

1. ①　$\dfrac{2+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}+\dfrac{2-\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

$=\dfrac{(2+\sqrt{3})(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{\{(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}\}\{(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}\}}$

$=\dfrac{10+4\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})^2-3}=\dfrac{10+4\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\dfrac{2(5+2\sqrt{2})\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\sqrt{2}}=\dfrac{5\sqrt{2}+4}{2}$

②　$\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{7-4\sqrt{3}}}=\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{(4+3)-2\sqrt{12}}}=\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{(\sqrt{4}-\sqrt{3})^2}}=\dfrac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$

$=\dfrac{(2+\sqrt{3})^2}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=7+4\sqrt{3}$

2. ①　$(a+b)(a-2b)(a^2-ab+2b^2)$

$=(a^2-ab-2b^2)(a^2-ab+2b^2)$

$=\{(a^2-ab)-2b^2\}\{(a^2-ab)+2b^2\}$

$=(a^2-ab)^2-(2b^2)^2$

$=a^4-2a^3b+a^2b^2-4b^4$

②　$(x^2-2x+3)(3+2x+x^2)$

$=\{(x^2+3)-2x\}\{(x^2+3)+2x\}$

$=(x^2+3)^2-(2x)^2$

$=x^4+2x^2+9$

③ $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$
$=\{(x+1)(x+4)\}\{(x+2)(x+3)\}$
$=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)$
$=(x^2+5x)^2+10(x^2+5x)+24$
$=x^4+10x^3+35x^2+50x+24$

3. ① $x^3-8=x^3-2^3=(x-2)(x^2+2x+4)$
② $6x^2-x-2=(2x+1)(3x-2)$
③ $x^4-5x^2+4=(x^2-1)(x^2-4)$
$=(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)$
④ $x^4+x^2+1=(x^2+1)^2-x^2$
$=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$
⑤ $2x^2+xy-y^2+3y-2=2x^2+yx-(y-1)(y-2)$
$=(2x-y+2)(x+y-1)$
⑥ $(x^2+2x-2)(x^2+2x+4)-7$
x^2+2x を A とおくと
与式$=$(A -2)(A $+4$)-7
$=$A$^2+2$A $-8-7$
$=$A$^2+2$A -15
$=$(A -3)(A $+5$)
もとにもどすと
与式$=(x^2+2x-3)(x^2+2x+5)$
$=(x-1)(x+3)(x^2+2x+5)$
⑦ $4x^4-13x^2y^2+9y^4$
$=(4x^4-12x^2y^2+9y^4)-x^2y^2$
$=(2x^2-3y^2)^2-x^2y^2$
$=(2x^2-xy-3y^2)(2x^2+xy-3y^2)=(2x-3y)(x+y)(2x+3y)(x-y)$

4. 剰余定理より $P(2)=7$ であるから
$P(2)=m^2+4m+2=7$
$m^2+4m-5=0$, $(m-1)(m+5)=0$
$\therefore\quad m=1,\ -5$

5. $P(x)$ を $(x+1)(x+2)(x+3)$ で割った商を $Q(x)$, 余りを ax^2+bx+c とすると
$P(x)=(x+1)(x+2)(x+3)Q(x)+ax^2+bx+c$
$P(-1)=a-b+c=2$……①
$P(-2)=4a-2b+c=3$……②
$P(-3)=9a-3b+c=6$……③
①, ②, ③より $a=1$, $b=2$, $c=3$
余りは x^2+2x+3

6.　①　$1-\dfrac{1}{x-\dfrac{1}{x}}=1-\dfrac{1}{\dfrac{x^2-1}{x}}=1-\dfrac{x}{x^2-1}=\dfrac{x^2-x-1}{x^2-1}$

②　このまま通分すると大変な計算になるので，

$$\begin{aligned}&\frac{x+1}{x}-\frac{x+2}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}-\frac{x+2}{x+3}\\&=\left(1+\frac{1}{x}\right)-\left(1+\frac{1}{x+1}\right)+\left(1-\frac{1}{x+2}\right)-\left(1-\frac{1}{x+3}\right)\\&=\left\{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right\}-\left\{\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}\right\}\\&=\frac{1}{x(x+1)}-\frac{1}{(x+2)(x+3)}\\&=\frac{2(2x+3)}{x(x+1)(x+2)(x+3)}\end{aligned}$$

7.　$\dfrac{x^2}{x^2-3x+2}=\dfrac{(x^2-3x+2)+3x-2}{x^2-3x+2}$

$=1+\dfrac{3x-2}{(x-1)(x-2)}=1+\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{x-2}$ とおく．

両辺に $(x-1)(x-2)$ をかけて分母を払うと，

$x^2=(x-1)(x-2)+a(x-2)+b(x-1)$

これに $x=1$ を代入すると，$a=-1$

また，$x=2$ を代入すると，$b=4$

よって，$\dfrac{x^2}{x^2-3x+2}=1-\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{4}{x-2}$