第 14 章　フーリエ級数

演習問題 14.1

1.　奇関数であるから，$a_n=0$.

$$\begin{cases} -\dfrac{T}{2}<t\leqq 0 \text{ のとき，} f(t)=-1 \\ 0<t\leqq +\dfrac{T}{2} \text{ のとき，} f(t)=1 \end{cases}$$

$$a_n=\frac{2}{T}\left\{\int_{-\frac{T}{2}}^{0}-\cos n\omega t dt+\int_{0}^{\frac{T}{2}}\cos n\omega t dt\right\}$$

$$=\frac{2}{T}\left\{\left[\frac{-\sin n\omega t}{n\omega}\right]_{-\frac{T}{2}}^{0}+\left[\frac{\sin n\omega t}{n\omega}\right]_{0}^{\frac{T}{2}}\right\}$$

$$=\frac{2}{T}\left\{\frac{\sin n\omega\left(-\dfrac{T}{2}\right)}{n\omega}+\frac{\sin n\omega\left(\dfrac{T}{2}\right)}{n\omega}\right\}=0$$

$$b_n=\frac{2}{T}\left\{\int_{-\frac{T}{2}}^{0}-\sin n\omega t dt+\int_{0}^{+\frac{T}{2}}\sin n\omega t dt\right\}$$

$$=\frac{2}{T}\left\{\left[\frac{\cos n\omega t}{n\omega}\right]_{-\frac{T}{2}}^{0}+\left[\frac{-\cos n\omega t}{n\omega}\right]_{0}^{+\frac{T}{2}}\right\}$$

$$=\frac{2}{T}\left\{\frac{1}{n\omega}-\frac{\cos n\omega\left(-\dfrac{T}{2}\right)}{n\omega}+\frac{-\cos n\omega\left(\dfrac{T}{2}\right)}{n\omega}+\frac{1}{n\omega}\right\}$$

$\omega T=2\pi$ より，

$$b_n=\frac{2}{\omega Tn}\left\{2-2\cos n\omega\left(\frac{T}{2}\right)\right\}=\frac{2}{n\pi}(1-\cos n\pi)$$

$$\begin{cases} n=1 \text{ のとき，} b_1=\dfrac{4}{\pi} \\ n=2 \text{ のとき，} b_2=0 \\ n=3 \text{ のとき，} b_3=\dfrac{4}{\pi}\cdot\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

以上より，式(14.13)が得られる.

2.　偶関数であるから $b_n=0$.

$$\begin{cases} -\dfrac{T}{2}<t\leqq 0 \text{ のとき，} f(t)=1+\dfrac{4t}{T} \\ 0<t\leqq \dfrac{T}{2} \text{ のとき，} f(t)=1-\dfrac{4t}{T} \end{cases}$$

$$a_n=\frac{2}{T}\left\{\int_{-\frac{T}{2}}^{0}\left(1+\frac{4t}{T}\right)\cos n\omega t dt+\int_{0}^{+\frac{T}{2}}\left(1-\frac{4t}{T}\right)\cos n\omega t dt\right\}$$

$$=\frac{8}{T^2}\left\{\left[\frac{1}{n\omega}t\sin n\omega t\right]_{-\frac{T}{2}}^{0}-\frac{1}{n\omega}\int_{-\frac{T}{2}}^{0}\sin n\omega t dt\right.$$

$$\left.-\left[\frac{1}{n\omega}t\sin\omega t\right]_{0}^{+\frac{T}{2}}+\frac{1}{n\omega}\int_{0}^{+\frac{T}{2}}\sin n\omega t dt\right\}$$

$$=\frac{8}{T^2}\left\{\frac{-1}{n\omega}\left(-\frac{T}{2}\right)\sin n\omega\left(-\frac{T}{2}\right)-\frac{1}{n\omega}\left[\frac{-1}{n\omega}\cos n\omega t\right]_{-\frac{T}{2}}^{0}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{n\omega}\left(\frac{T}{2}\right)\sin n\omega\left(\frac{T}{2}\right)+\frac{1}{n\omega}\left[\frac{-1}{n\omega}\cos n\omega t\right]_{0}^{+\frac{T}{2}}\right\}$$

$$=\frac{8}{n\omega T^2}\left\{\frac{1}{n\omega}-\frac{1}{n\omega}\cos n\omega\left(-\frac{T}{2}\right)-\frac{1}{n\omega}\cos n\omega\left(\frac{T}{2}\right)+\frac{1}{n\omega}\right\}$$

$$=\frac{8}{(n\omega T)^2}\left\{2-2\cos n\omega\left(\frac{T}{2}\right)\right\}$$

$\omega T=2\pi$ より，

$$a_n=\frac{4}{\pi^2 n^2}(1-\cos n\pi)$$

$$\begin{cases} n=1 \text{ のとき，} a_1=\dfrac{8}{\pi^2} \\ n=2 \text{ のとき，} a_2=0 \\ n=3 \text{ のとき，} a_3=\dfrac{8}{\pi^2}\cdot\dfrac{1}{9} \end{cases}$$

以上より，式(14.14)が得られる．

3．奇関数であるから，$a_n=0$．

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\frac{2}{T}t\sin n\omega t dt=\frac{4}{T^2}\left\{\left[\frac{-1}{n\omega}t\cos n\omega t\right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}+\frac{1}{n\omega}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\cos n\omega t dt\right\}$$

$$=\frac{4}{T^2}\left\{\frac{-1}{n\omega}\left(\frac{T}{2}\right)\cos n\omega\left(\frac{T}{2}\right)+\frac{1}{n\omega}\left(-\frac{T}{2}\right)\cos n\omega\left(-\frac{T}{2}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{n\omega}\left[\frac{1}{n\omega}\sin n\omega t\right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\right\}$$

$$=\frac{4}{T^2 n\omega}\left\{-T\cos n\omega\left(\frac{T}{2}\right)+\frac{1}{n\omega}\sin n\omega\left(\frac{T}{2}\right)-\frac{1}{n\omega}\sin n\omega\left(-\frac{T}{2}\right)\right\}$$

$$=\frac{4}{T^2 n\omega}\left\{-T\cos n\omega\left(\frac{T}{2}\right)+\frac{2}{n\omega}\sin n\omega\left(\frac{T}{2}\right)\right\}$$

$\omega T=2\pi$ より

$$b_n=\frac{2}{\pi n T}\left(-T\cos n\pi+\frac{2}{n\omega}\sin n\pi\right)$$

$$\begin{cases} n=1 \text{ のとき，} b_1=\dfrac{2}{\pi} \\ n=2 \text{ のとき，} b_2=\dfrac{2}{\pi}\left(-\dfrac{1}{2}\right) \\ n=3 \text{ のとき，} b_3=\dfrac{2}{\pi}\cdot\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

以上より，式(14.15)が得られる．

演習問題 14.2

1.　①
$$\begin{cases} |t|>\tau \text{ のとき，} f(t)=0 \\ -\tau<t\leqq 0 \text{ のとき，} f(t)=1+\dfrac{t}{\tau} \\ 0<t<\tau \text{ のとき，} f(t)=1-\dfrac{t}{\tau} \end{cases}$$

②
$$\begin{aligned} F(\omega)&=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\varepsilon^{-j\omega t}dt=\int_{-\tau}^{0}\left(1+\frac{t}{\tau}\right)\varepsilon^{-j\omega t}+\int_{0}^{\tau}\left(1-\frac{t}{\tau}\right)\varepsilon^{-j\omega t}dt \\ &=\int_{-\tau}^{0}\varepsilon^{-j\omega t}dt+\frac{1}{\tau}\int_{-\tau}^{0}t\varepsilon^{-j\omega t}dt+\int_{0}^{\tau}\varepsilon^{-j\omega t}dt-\frac{1}{\tau}\int_{0}^{\tau}t\varepsilon^{-j\omega t}dt \\ &=\left[\frac{\varepsilon^{-j\omega t}}{-j\omega}\right]_{-\tau}^{0}+\frac{1}{\tau}\left[\varepsilon^{-j\omega t}\left(\frac{1}{\omega^2}-\frac{t}{j\omega}\right)\right]_{-\tau}^{0}+\left[\frac{\varepsilon^{-j\omega t}}{-j\omega}\right]_{0}^{\tau}-\frac{1}{\tau}\left[\varepsilon^{-j\omega t}\left(\frac{1}{\omega^2}-\frac{t}{j\omega}\right)\right]_{0}^{\tau} \\ &=\frac{2}{\omega^2\tau}-\frac{2}{\omega^2\tau}\frac{(\varepsilon^{j\omega\tau}+\varepsilon^{-j\omega\tau})}{2}=\frac{2}{\tau}\left\{\frac{1}{\omega^2}(1-\cos\omega\tau)\right\}=\frac{4}{\omega^2\tau}\sin^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \end{aligned}$$

$x=\dfrac{\omega\tau}{2}$ とすると，

$$F(\omega)=\tau\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$$

章末問題 14

1.　周期 T での振幅の平均値が 0 であるため，直流分を表すフーリエ係数 $a_0=0$ となる．また，y 軸に対称な三角波，つまり偶関数であるため sin 項を表すフーリエ変換 $b_n=0$ となる．フーリエ変換は，次式のようになる（導出は，演習問題 14.1 の 2 を参照）．

$$f(t)=\frac{8}{\pi^2}\left(\cos\omega t+\frac{1}{9}\cos 3\omega t+\frac{1}{25}\cos 5\omega t+\cdots\right)$$

2.　偶関数であるため $b_n=0$，式(14.19)を用いて a_0，a_n を計算する．

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(-t+\pi)dt=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{2}t^2+\pi t\right]_0^{\pi}=\pi$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(-t+\pi)\cos ntdt=\frac{2}{\pi}\left\{\left[-\frac{1}{n}t\sin nt\right]_0^{\pi}+\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin ntdt+\left[\frac{n}{\pi}\sin nt\right]_0^{\pi}\right\}$$

$$=\frac{2}{\pi}\left\{\frac{1}{n^2}[-\cos nt]_0^{\pi}\right\}=\frac{2}{\pi n^2}(1-\cos n\pi)$$

3．$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\varepsilon^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{0}\varepsilon^{at}\varepsilon^{-j\omega t}dt+\int_{0}^{\infty}\varepsilon^{-at}\varepsilon^{-j\omega t}dt$

$$=[-\cos nt]_0^{\pi}=\frac{1}{a-j\omega}+\frac{1}{a+j\omega}=\frac{2a}{a^2+\omega^2}$$