第２章　関数と方程式・不等式

演習問題２.１

1.　値域は $f(0) \leqq y \leqq f(3)$ であるから，$0 \leqq y \leqq 1$

2.　$y=3x-4 \quad (0 \leqq x \leqq 4)$ を x について解くと

$$x=\frac{y+4}{3} \quad (-4 \leqq y \leqq 8)$$

x と y を入れかえると

$$y=\frac{x+4}{3} \quad (-4 \leqq x \leqq 8,\ 0 \leqq y \leqq 4)$$

よって逆関数の定義域と値域は

$-4 \leqq x \leqq 8,\ 0 \leqq y \leqq 4$

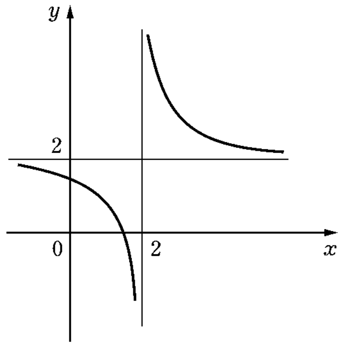
演習問題２.２

1.　$y=\dfrac{2x-3}{x-2}=\dfrac{(2x-4)+1}{x-2}=2+\dfrac{1}{x-2}=\dfrac{1}{x-2}+2$

よって，与式のグラフは $y=\dfrac{1}{x}$ のグラフを x 軸方向に 2，y 軸方向に 2 だけ平行移動したものである．漸近線の方程式は

$x=2,\ y=2$

である．

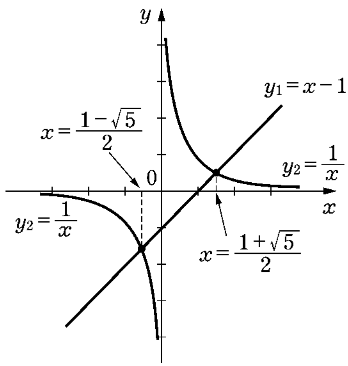


2.　①　$y_1=x-1$ と $y_2=\dfrac{1}{x}$ のグラフの交点の x 座標を求める．交点の座標は，与式の両辺に x をかけて

$x(x-1)=1$

$x^2-x-1=0$

$x=\dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$



② $y_1=x$ と $y_2=\dfrac{2}{x-1}$ のグラフを描き，$y_1<y_2$ となる x の範囲を求める．交点の x 座標は

$x=\dfrac{2}{x-1}$，$x(x-1)=2$

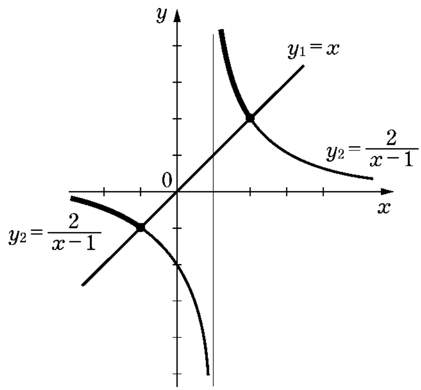
$x^2-x-2=0$

$(x+1)(x-2)=0$

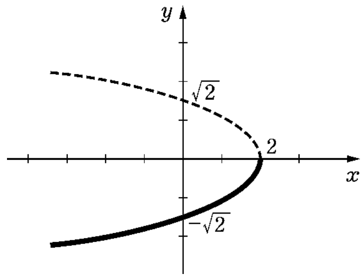
$x=-1$，2

よってグラフより不等式の解は

$x<-1$，$1<x<2$



3． 与式は $y=-\sqrt{-(x-2)}$ と描き直せるので，$y=-\sqrt{-x}$ のグラフを x 軸方向に 2 だけ平行移動したものである．



4． ① $y_1=\sqrt{x}$ のグラフと $y_2=x-2$ との交点の x 座標を求める．交点の座標は，与式の両辺を平行して

$x=x^2-4x+4$

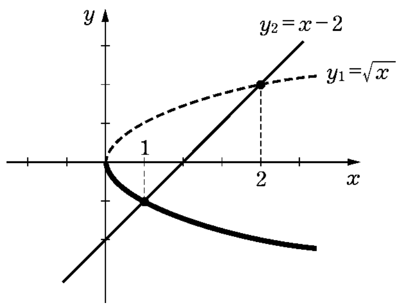
$x^2-5x+4=0$

$(x-1)(x-4)=0$

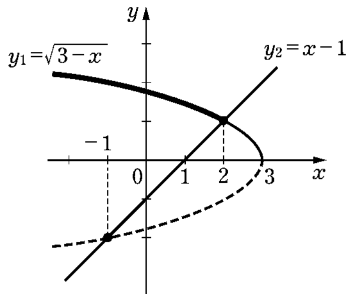
$x=1$，4

グラフより解 $x=-1$ は不適．

よって解は $x=4$



② $y_1=\sqrt{3-x}$ のグラフと $y_2=x-1$ のグラフを描き，$y_1 \geqq y_2$ となる x の範囲を求める．交点の座標は，与式の両辺を平方して



$3-x \geqq x^2-2x+1$

$x^2-x-2 \leqq 0$

$(x+1)(x-2) \geqq 0$

$x=-1,\ 2$

グラフより解は $x \leqq 2$

演習問題 2.3

1\. ① $\dfrac{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt[6]{6}\cdot\sqrt[3]{1.5}}=\dfrac{2^{\frac{1}{3}}\cdot 3^{\frac{1}{2}}}{(2\cdot 3)^{\frac{1}{6}}\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}}=2^{\frac{1}{3}}\cdot 3^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{-\frac{1}{6}}\cdot 3^{-\frac{1}{6}}\cdot 3^{-\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{3}}$

$=2^{\frac{2+2-1}{6}}\cdot 3^{\frac{3-1-2}{6}}=2^{\frac{1}{2}}\cdot 3^0=\sqrt{2}$

② $\log_{10}\dfrac{28}{15}+3\log_{10}\dfrac{6}{7}-2\log_{10}\dfrac{3}{14}=\log_{10}\dfrac{2^2\cdot 7}{3.5}+\log_{10}\dfrac{2^3\cdot 3^3}{7^3}-\log_{10}\dfrac{3^2}{2^2\cdot 7^2}$

$=\log_{10}\left(\dfrac{2^2\cdot 7}{3.5}\times\dfrac{2^3\cdot 3^3}{7^3}\times\dfrac{2^2\cdot 7^2}{3^2}\right)=\log_{10}\dfrac{2^7}{5}=7\log_{10}2-\log_{10}5$

$=7\log_{10}2-\log_{10}\left(\dfrac{10}{2}\right)=7\log_{10}2-1+\log_{10}2=8\log_{10}2-1$

③ $\log_{\sqrt{2}}16=\dfrac{\log_2 2^4}{\log_2 2^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{4}{\dfrac{1}{2}}=8$

④ $\dfrac{3}{2}\log_3 2+\dfrac{1}{2}\log_3\dfrac{1}{6}-\log_3\dfrac{2\sqrt{3}}{3}=\dfrac{3}{2}\log_3 2-\dfrac{1}{2}\log_3 6-\log_3\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

$=\dfrac{3}{2}\log_3 2-\dfrac{1}{2}(\log_3 2+\log_3 3)-\left(\log_3 2-\dfrac{1}{2}\log_3 3\right)$

$=\left(\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}-1\right)\log_3 2-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=0$

⑤ $\log_2 5\cdot\log_3 4\cdot\log_5 3=\log_2 5\cdot\dfrac{\log_2 4}{\log_2 3}\cdot\dfrac{\log_2 3}{\log_2 5}=\log_2 4=2$

2\. ① $2^{2x}-2^{x+1}-8=0$

$(2^x)^2-2(2^x)-8=0$

$(2^x+2)(2^x-4)=0$

$2^x>0$ より $2^x=4$

$\therefore\ 2^x=2^2\qquad\therefore\ x=2$

② $\left(\frac{1}{3}\right)^x < \left(\frac{1}{3}\right)^3$

底が1より小さいので

∴ $x > 3$

③ 真数条件：$2x+6>0$ ∴ $x>-3$

$2x-3>0$ ∴ $x>\frac{3}{2}$

与式$=\log_2\sqrt{2x+6}-\log_2\sqrt{2x-3}$

$=\log_2\frac{\sqrt{2x+6}}{\sqrt{2x-3}}=\log_2 2=1$

よって $\frac{\sqrt{2x+6}}{\sqrt{2x-3}}=2$

両辺を2乗して $\frac{2x+6}{2x-3}=4$

$2x+6=8x-12$ ∴ $x=3$ （$x=3$ は真数条件を満足する）

章末問題２

1. $y=1-\frac{4}{x+2}$

$x>0$ より $x+2>2$

よって $0<\frac{4}{x+2}<2$

∴ $-1<y<1$

2. $y=\frac{x+3}{x-1}=1+\frac{4}{x-1}$ $(-1\leqq x<1)$

$-1\leqq x<1$ のとき，$-1\geqq y$ である．

x について解くと $x=\frac{y+3}{y-1}$

x と y を入れかえると $y=\frac{x+3}{x-1}$ $(-1\geqq x,\ -1\leqq y<1)$

逆関数の定義域と値域は

$-1\geqq x,\ -1\leqq y<1$

3. ① $(a+b)(a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}})=\frac{(a+b)(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}})}{(a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}})(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}})}=\frac{(a+b)(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}})}{a+b}$

$=a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}$

② $\frac{3}{2}\log_8 9=\frac{3}{2}\frac{\log_2 9}{\log_2 8}=\frac{3}{2}\cdot\frac{2\log_2 3}{3}=\log_2 3$

であるから

$2^{\frac{3}{2}\log_8 9}=2^{\log_2 3}=3$

③ $\frac{\log_{10}\sqrt{2}+\log_{10}3-\log_{10}\sqrt{10}}{2\log_{10}3-\log_{10}5}=\frac{\frac{1}{2}\log_{10}2+\log_{10}3-\frac{1}{2}\log_{10}10}{2\log_{10}3-\log_{10}10+\log_{10}2}$

$=\frac{\frac{1}{2}(\log_{10}2+2\log_{10}3-1)}{\log_{10}2+2\log_{10}3-1}=\frac{1}{2}$

4．① $a^{2x}-3a^x-10<0$

$a^x>0$，$a^x=A$ とおくと

$(a^x)^2-3(a^x)-10<0$

$A^2-3A-10<0$

$(A-5)(A+2)<0$

$A>0$ であるから

$0<A<5$ よって $0<a^x<5$

$a>1$ のとき

$x<\log_a 5$

$0<a<1$ のとき

$x>\log_a 5$

② $2^{2x}-4\leqq 2(2^{x+2}-8)$

$2^x>0$，$2^x=\mathrm{A}$ とおいて整理すると

$\mathrm{A}^2-8\mathrm{A}+12\leqq 0$

$(\mathrm{A}-2)(\mathrm{A}-6)\leqq 0$

∴ $2\leqq\mathrm{A}\leqq 6$

$2\leqq 2^x\leqq 6$

対数をとると

$1\leqq x\leqq\log_2 6$

③ 真数条件より $x>0$

$\log_3 x=\mathrm{X}$ とおくと

$\mathrm{X}^2-4\mathrm{X}+3=0$

$(\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}-3)=0$

$\mathrm{X}=1,\ 3$

∴ $\log_3 x=1,\ 3$

$x=3,\ 27$

④　真数条件より $x>0$

与式$=\log_2 x(\log_2 4+\log_2 x)-3\log_2 x-6=0$

$=\log_2 x(2+\log_2 x)-3\log_2 x-6=0$

$\log_2 x=\mathrm{X}$ とおくと

与式$=\mathrm{X}(2+\mathrm{X})-3\mathrm{X}-6=\mathrm{X}^2-\mathrm{X}-6$

$=(\mathrm{X}+2)(\mathrm{X}-3)=0$

$\mathrm{X}=-2,\ 3$ すなわち $\log_2 x=-2,\ 3$

$\log_2 x=-2$ のとき $x=2^{-2}=\dfrac{1}{4}$

$\log_2 x=3$ のとき $x=2^3=8$

⑤　真数条件より

$x-1>0$　　$\therefore$　$x>1$ …… ①

$\log_2 x(x-1)\leqq\log_2 2$，底が 1 より大きいので

よって $x(x-1)\leqq 2$

$x^2-x-2\leqq 0$

$(x-2)(x+1)\leqq 0$

真数条件 $x>1$ より

$(x+1)>0$

よって $x-2\leqq 0$ …………… ②

$\therefore$　$x\leqq 2$

①，②より $1<x\leqq 2$

⑥　真数条件より

$x>0$，$x-1>0$，$x-2>0$，よって $x>2$

$\log_2(x-1)\geqq 1+2\log_2(x-2)$

$\log_2(x-1)\geqq\log_2 2(x-2)^2$

底は 1 より大きいから

$(x-1)\geqq 2(x-2)^2$

$(2x-3)(x-3)\leqq 0$

$\dfrac{3}{2}\leqq x\leqq 3$

真数条件 $x>2$ と合わせると

$2<x\leqq 3$

5．条件式 $1<x<a$ より

$\log_a 1<\log_a x<\log_a a$

$\therefore$　$0<\log_a x<1$

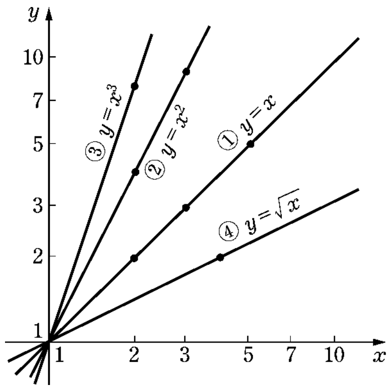
よって $\log_a x<1$

6.　3^{20} の常用対数をとると

$$\log_{10} 3^{20} = 20 \log_{10} 3$$
$$= 20 \times 0.4771 = 9.542$$
$$9 < \log_{10} 3^{20} < 10$$
$$\therefore \quad 10^9 < 3^{20} < 10^{10}$$ よって 10 桁

補足問題

1.



2.