第９章　微分の基本

演習問題９.１

1．①　$\lim_{x\to 0}\varepsilon^{-x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\varepsilon^{x}}=1$

②　$\lim_{x\to\infty}\varepsilon^{-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\varepsilon^{x}}=\frac{1}{\infty}=0$

③　そのまま代入すると，$\infty\cdot 0$ となり ∞ になるのか 0 になるかわからない．こういう関数は公式 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ を用いたり，マクローリン展開を用いたりする．ここではてっとり早い方法として，適当に値を代入して極限値に近づけてみる．$\lim_{x\to 10}x\cdot\varepsilon^{-x}=4.5\times 10^{-4}$（ただし $\varepsilon\fallingdotseq 2.72$ とする），$\lim_{x\to 50}x\cdot\varepsilon^{-x}=9.6\times 10^{-21}$，$\lim_{x\to 100}x\cdot\varepsilon^{-x}=3.7\times 10^{-42}$ となり急速に 0 に近づく．

（答）　$\lim_{x\to 10}x\cdot\varepsilon^{-x}=0$

④　$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-10x+12}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x-6)}{(x-2)(x+2)}=\frac{1}{2}$

⑤　$\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)^3-1}{x(x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x^2+3x+3)}{x(x-1)}=-3$

2．①　平均変化率：$\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=\frac{(8-4)-(1-1)}{1}=4$

微分係数：$f'(-2)=\lim_{h\to -2}\frac{\{(-2+h)^3-(-2+h)^2\}-\{(-2)^3-(-2)^2\}}{h}=16$

②　平均変化率：$\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=\frac{(4+4-1)-(1+2-1)}{2-1}=5$

微分係数：$f'(-2)=\lim_{h\to -2}\frac{\{(-2+h)^2+2(-2+h)-1\}-\{(-2)^2+2(-2)-1\}}{h}=-2$

3．①　$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[\{(x+h)^2+2(x+h)-1\}-\{x^2+2x-1\}]$

$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[2xh+h^2+2h]=2x+2$

②　$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[\{5(x+h)^2-(x+h)^3\}-\{5x^2-x^3\}]$

$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[(10xh+5h^2)-(3x^2h+3xh+h^3)]=10x-3x^2$

③　$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[\sqrt{x+h}-\sqrt{x}]=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}\right]$

$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{h}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}\right]=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

演習問題 9.2

1．① $f'(x)=-16x^3+14x+3$

② $z=x+1$ とおいて

$$f'(x)=\frac{dz^{10}}{dz}\cdot\frac{d(x+1)}{dx}=10z^9\cdot 1=10(x+1)^9$$

③ $$f'(x)=\frac{(x^3)'(x+1)^3-x^3\{(x+1)^3\}'}{(x+1)^6}=\frac{3x^2(x+1)^3-3x^3(x+1)^2}{(x+1)^6}=\frac{3x^2}{(x+1)^4}$$

④ $$f'(x)=\frac{(x+1)'(x-1)-(x+1)(x-1)'}{(x-1)^2}=\frac{-2}{(x-1)^2}$$

2．① 式(9.13)と式(9.14)から

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}$$

$\dfrac{dx}{dt}=1$，$\dfrac{dy}{dt}=3$ より $\dfrac{dy}{dx}=3$

② $\dfrac{dx}{dt}=2$，$\dfrac{dy}{dt}=2t$ より

$$\frac{dy}{dx}=t\ \left(=\frac{1}{2}(x-1)\right)$$

3．① $f'(x)=6(2x-1)^2$，$f''(x)=24(2x-1)$

② $f'(x)=-\dfrac{3}{(3x-2)^2}$，$f''(x)=\dfrac{18}{(3x-2)^3}$

演習問題 9.3

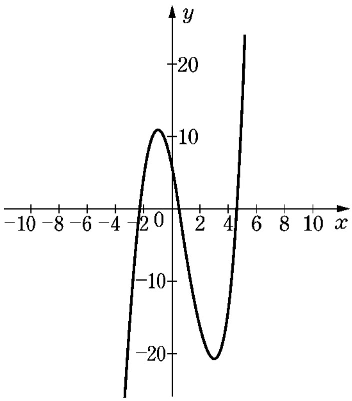
1．① $f'(x)=0$ となる x を求める．$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x-3)(x+1)=0$

$x=-1$ のとき $f(-1)=11$ （極大値）

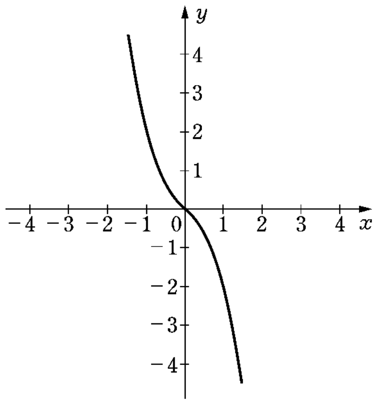
$x=3$ のとき $f(3)=-21$ （極小値）

x		-1		3	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

② $f'(x)=-3x^2-1=-(3x^2+1)=0$ となり x の実数解を持たない．$f(x)$ は常に単調減少である．



① のグラフ



② のグラフ

2.　回路のインピーダンス $\dot{Z}=R+\dfrac{1}{j\omega C}$ なので $|\dot{Z}|=\sqrt{R^2+\left(\dfrac{1}{\omega C}\right)^2}$．電流の大きさは

$I=\dfrac{|\dot{E}|}{|\dot{Z}|}=\dfrac{E}{\sqrt{R^2+\left(\dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}$ となり，抵抗 R の消費電力 P は，

$P=RI^2=\dfrac{E^2R}{\left(R^2+\dfrac{1}{\omega^2C^2}\right)}$，$\dfrac{dP}{dR}=0$ となる R を求めると $R=\dfrac{1}{\omega C}$ を得る．

したがって，$P=\dfrac{E^2\omega C}{2}$

章末問題 9

1.　①　$\lim\limits_{x\to-1}(x^3-3x^2+1)=(-1)^3-3(-1)^2+1=-3$

②　$\dfrac{0}{0}$ のものは因数分解できないか考えてみる．

$$\lim_{x\to2}\frac{2x^2-x-6}{2x^2-7x+6}=\lim_{x\to2}\frac{(2x+3)(x-2)}{(2x-3)(x-2)}=\lim_{x\to2}\frac{(2x+3)}{(2x-3)}=7$$

③　$\dfrac{0}{0}$ で無理式の場合は有理化してみる．

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}\,\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=1$$

④　$x\to\infty$ は最大次数がきいてくる.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2-2x+4}{3x^2+3x+7}=\lim_{x\to\infty}\frac{5-\dfrac{2}{x}+\dfrac{4}{x^2}}{3-\dfrac{3}{x}+\dfrac{7}{x^2}}=\frac{5}{3}$$

2.　①　$f'(x)=(x^3-2x+1)'(x^2-3x)+(x^3-2x+1)(x^2-3x)'$

$=(3x^2-2)(x^2-3x)+(x^3-2x+1)(2x-3)=5x^4-12x^3+6x^2-10x-3$

②　$f'(x)=\dfrac{-(x-1)'}{(x-1)^2}+\dfrac{-(x+1)'}{(x+1)^2}=-\dfrac{2(x^2+1)}{(x^2-1)^2}$

③　$f'(x)=\dfrac{(2x^2)'(x+1)^2-(2x^2)\{(x+1)^2\}'}{(x+1)^4}=\dfrac{4x}{(x+1)^3}$

④　$f'(x)=\dfrac{-\{(x^2-3x+1)^3\}'}{\{(x^2-3x+1)^3\}^2}=-\dfrac{3(2x-3)}{(x^2-3x+1)^4}$

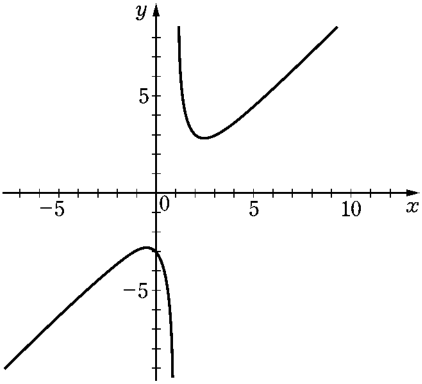
3.　①　$f'(x)=\dfrac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$，$f'(x)=0$ となる x は $x=1\pm\sqrt{2}$

$x=1-\sqrt{2}$ のとき
$f(1-\sqrt{2})=-2\sqrt{2}$
（極大値）
$x=1+\sqrt{2}$ のとき
$f(1+\sqrt{2})=2\sqrt{2}$　（極小値）

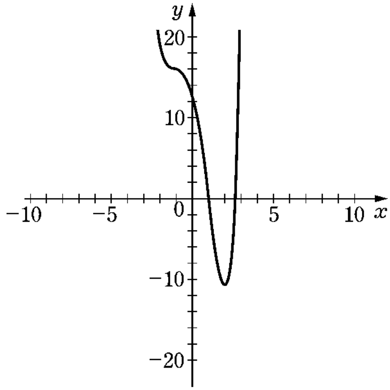
x		$1-\sqrt{2}$		1		$1+\sqrt{2}$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	$-\infty+\infty$	↘	極小	↗

②　$f'(x)=4(x+1)^2(x-2)$
$f'(x)=0$ となるのは $x=-1,\ 2$
$x=2$ のとき $f(2)=-11$　（最小値）
（注意）　$f'(x)=0$ の実数解が必ずしも極値を持つとは限らない.

x		-1		2	
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↘	極小	↗



① のグラフ



② のグラフ