第４章　行列と連立方程式

演習問題４.１

1．①

$$[A]\times[B]=\begin{bmatrix}5&4&4\\18&2&16\\6&-4&6\end{bmatrix},\ [B]\times[A]\begin{bmatrix}2&0&0\\24&11&-1\\-4&-2&0\end{bmatrix}$$

つまり，$[A]\times[B]\neq[B]\times[A]$ である.

② $|A|=0+0+0-(-6)-(4)-(0)=2$

③ $|A|'_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2&0\\0&1\end{vmatrix}=2$

④ $[A]^{-1}=\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}2&-1&2\\-4&3&-4\\-6&3&-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-0.5&1\\-2&1.5&-2\\-3&1.5&-2\end{bmatrix}$

⑤ $[A]\times[A]^{-1}=\begin{bmatrix}0&1&-1\\4&2&0\\3&0&1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&-0.5&1\\-2&1.5&2\\-3&1.5&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=[E]$

演習問題４.２

1．与式の上式より

$x=\dfrac{50+4y}{7}$

この式を与式の下式に代入すると，

$\dfrac{5(50+4y)}{7}+3y=24$ より，$y=-2$

$y=-2$ を与式の上式に代入すると，

$7x-4(-2)=50$ より，$x=6$

(答)　$x=6$ ，$y=-2$

2．①

$$\begin{array}{r}-4x+3y=11\\ +)\underline{2\times2x-2\times y=2\times(-5)}\\ y=1\end{array}$$

$-4x+3(1)=11$ より $x=-2$

(答)　$x=-2$ ，$y=1$

②

$$\begin{array}{rl} & 3x+y-2z=13 \\ +) & -4x-y+5z=-31 \\ \hline & -x \quad +3z=-18 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} & 3\times 3x+3\times y-3\times 2z=3\times 13 \\ -) & 7x+3y-4z=23 \\ \hline & 2x \quad -2z=16 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & -x+3z=-18 \\ +) & x-z=8 \\ \hline & 2z=-10 \end{array}$$ より，$z=-5$

$-x+3(-5)=-18$ より，$x=3$

$3(3)+y-2(-5)=13$ より，$y=-6$

(答)　$x=3$ ，$y=-6$ ，$z=-5$

3．①

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} -42 \\ 51 \end{bmatrix}=\frac{1}{47}\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -42 \\ 51 \end{bmatrix}=\frac{1}{47}\begin{bmatrix} -141 \\ 423 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -3 \\ 9 \end{bmatrix}$$

(答)　$x=-3$ ，$y=9$

②

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} -4 \\ 9 \\ -1 \end{bmatrix}=\frac{1}{8}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 \\ 9 \\ -1 \end{bmatrix}=\frac{1}{8}\begin{bmatrix} -16 \\ 8 \\ 32 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

(答)　$x=-2$ ，$y=1$ ，$z=4$

4．①

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -7 & 6 \\ 31 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -5 & 6 \\ 8 & -3 \end{vmatrix}}=\frac{-165}{-33},\quad y=\frac{\begin{vmatrix} -5 & -7 \\ 8 & 31 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -5 & 6 \\ 8 & -3 \end{vmatrix}}=\frac{-99}{-33}=3$$

(答)　$x=5$ ，$y=3$

②

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & -4 & 1 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix}=130 \text{ より，} x=\frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 30 & -4 & 1 \\ 1 & 5 & -2 \end{vmatrix}}{130}=\frac{520}{130}=4$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 30 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}}{130}=\frac{-390}{130}=-3,\quad z=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & -4 & 30 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix}}{130}=\frac{-260}{130}=-2$$

(答)　$x=4$ ，$y=-3$ ，$z=-2$

章末問題 4

1．① $\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 11 & -5 \end{bmatrix}$　② $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

③ $\begin{bmatrix} -6\times2+4\times7 & 0\times2+3\times7 \\ -6\times6+4\times4 & 0\times6+3\times4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 16 & 21 \\ -20 & 12 \end{bmatrix}$

④ $\begin{bmatrix} 2\times0+1\times(-2)+0\times1 \\ 2\times1+1\times3+0\times5 \\ 2\times4+1\times0+0\times2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}$

2．① $|A|=4+2+0-0-(-3)-(-4)=13$

② $|A|'_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}=-(-4)=4$

③ $[A]^{-1}=\dfrac{1}{13}\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -5 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & 7 \end{bmatrix}$

④ $[A]\times[A]^{-1}=\dfrac{1}{13}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -5 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & 7 \end{bmatrix}=\dfrac{1}{13}\begin{bmatrix} 13 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 13 \end{bmatrix}=[E]$

3．①

$$\begin{bmatrix} -5 & 7 & -2 \\ -4 & -9 & 5 \\ -1 & 2 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -6 \end{bmatrix}$$

②

$$\begin{array}{rr} & 2\times(-5)x+2\times7y-2\times2z=2\times3 \\ -) & \underline{-x+2y-4z=-6} \\ & -9x+12y=12\cdots\cdots(1) \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} & 5\times(-5)x+5\times7y-5\times2z=5\times3 \\ +) & \underline{2\times(-4)x-2\times9y+2\times5z=2\times1} \\ & -33x+17y=17\cdots\cdots(2) \end{array}$$

式(1)÷3×17→　$-51x+68y=68$

式(2)×4　→$-)\underline{-132x+68y=68}$

$81x=0$　より，$x=0$

式(1)に $x=0$ を代入すると，$-9(0)+12y=12$ より，$y=1$

$-5(0)+7(1)-2z=3$ より，$z=2$

(答)　$x=0$ ，$y=1$ ，$z=2$

③

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -5 & 7 & -2 \\ -4 & -9 & 5 \\ -1 & 2 & -4 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -6 \end{bmatrix}=\frac{1}{-243}\begin{bmatrix} 26 & 24 & 17 \\ -21 & 18 & 33 \\ -17 & 3 & 73 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$=-\frac{1}{243}\begin{bmatrix} 0 \\ -243 \\ -486 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

（答） $x=0$ ， $y=1$ ， $z=2$

④

$$\begin{vmatrix} -5 & 7 & -2 \\ -4 & -9 & 5 \\ -1 & 2 & -4 \end{vmatrix}=-243 \text{ より，} x=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 7 & -2 \\ 1 & -9 & 5 \\ -6 & 2 & -4 \end{vmatrix}}{-243}=\frac{0}{-243}=0$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} -5 & 3 & -2 \\ -4 & 1 & 5 \\ -1 & -6 & -4 \end{vmatrix}}{-243}=\frac{-243}{-243}=1,\quad z=\frac{\begin{vmatrix} -5 & 7 & 3 \\ -4 & -9 & 1 \\ -1 & 2 & -6 \end{vmatrix}}{-243}=\frac{-486}{-243}=2$$

（答） $x=0$ ， $y=1$ ， $z=2$

4．

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 19 \\ 5 \end{bmatrix}$$

例えば，クラメールの公式によって解くと，

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}=-16 \text{ より，} I_1=\frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 19 & 0 & 3 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{-16}=\frac{-80}{-16}=5$$

$$I_2=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 19 & 3 \\ 0 & 5 & 3 \end{vmatrix}}{-16}=\frac{32}{-16}=-2,\quad I_3=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 19 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}}{-16}=\frac{-48}{-16}=3$$

（答） $I_1=5A$ ， $I_2=-2A$ ， $I_3=3A$