第 13 章　微分方程式

演習問題 13.1

1．　$y'=(Cx^2)'=2Cx$

$C=\dfrac{y'}{2x}$ を与式に代入する．

$y=\dfrac{y'}{2x}x^2$

$2y=xy'$

$x=3$，$y=18$ を満たす特殊解は，$y=2x^2$

2．　① $y\dfrac{dy}{dx}=-x$　（変数分離形）

$\dfrac{1}{2}y^2=-\dfrac{1}{2}x^2+C$

$x^2+y^2=C$

② $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1-\dfrac{y}{x}}{1+\dfrac{y}{x}}$　（同次形）

$\dfrac{y}{x}=u$ とおく，$u'x+u=\dfrac{1-u}{1+u}$

$u'x=\dfrac{1-u}{1+u}-u=\dfrac{1-2u-u^2}{1+u}$

$-\dfrac{1+u}{u^2+2u-1}u'=\dfrac{1}{x}$　（変数分離形）

（ただし，$u^2+2u-1\neq 0$）

$-\displaystyle\int\frac{u+1}{u^2+2u-1}du=\int\frac{1}{x}dx$

$\displaystyle\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+C$ より

$-\dfrac{1}{2}\ln|u^2+2u-1|=\ln|x|+C$

$\ln|x|^2+\ln|u^2+2u-1|+\ln\varepsilon^C=0$

$\ln|x^2(u^2+2u-1)C|=0$

$|x^2(u^2+2u-1)C|=1$

$x^2(u^2+2u-1)=\pm C=C$

$\dfrac{y}{x}=u$ を代入する

$x^2\left\{\left(\dfrac{y}{x}\right)^2+2\left(\dfrac{y}{x}\right)-1\right\}=C$

$y^2+2xy-x^2=C$

この一般解は，$u^2+2u-1=0$ （$u=-1\pm\sqrt{2}$），つまり，$y=(-1\pm\sqrt{2})x$ を満足する．

演習問題 13.2

1．① 式(13.4)より，$y=C\varepsilon^{-\int\frac{2}{x}dx}=\dfrac{1}{x^2}C$

② 式(13.7)より，$y=\varepsilon^{\int 2dx}\left(\int\varepsilon^{\int 2dx}\cdot\varepsilon^{3x}dx+C\right)=\varepsilon^{2x}\left(\int\varepsilon^{x}dx+C\right)=\varepsilon^{3x}+C\varepsilon^{2x}$

2．① 式(13.11)より，$y=\iint x\varepsilon^{x}dxdx+C_1x+C_2=(x-2)\varepsilon^{x}+C_1x+C_2$

② $y=\varepsilon^{\frac{x}{2}}z(x)$ とすると，$z''-\dfrac{9}{4}z=0$ の標準形となる．この式は，式(13.18)における $q=-\dfrac{9}{4}<0$ $\left(\lambda^2=-\dfrac{9}{4}\right)$ である．式(13.24)より

$y=\varepsilon^{\frac{x}{2}}(C_1\varepsilon^{\frac{3}{2}x}+C_2\varepsilon^{-\frac{3}{2}x})=C_1\varepsilon^{2x}+C_2\varepsilon^{-x}$

章末問題 13

1．① $y'=-5C\varepsilon^{-5x}$ より $y'=-5y$

② $y'=C_1\varepsilon^{x}+C_2(\varepsilon^{x}+x\varepsilon^{x})=y+C_2\varepsilon^{x}$

$y''=y'+C_2\varepsilon^{x}=y'+(y'-y)=2y'-y$

$y''=2y'-y$

2．① $\dfrac{1}{y^2-1}\dfrac{dy}{dx}=-1$ より

$$\int\frac{1}{y^2-1}dy=-\int 1dx$$

$$\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{y-1}-\frac{1}{y+1}\right)dy=-x+C$$

$$\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right|=-2x+C=\ln\varepsilon^{(-2x+C)}$$

$$\frac{y-1}{y+1}=\varepsilon^{C}\cdot\varepsilon^{-2x}$$

$$y=\frac{1+C\varepsilon^{-2x}}{1-C\varepsilon^{-2x}}$$

3．①　$y'=\frac{x^2}{xy}+\frac{2y^2}{xy}=\frac{x}{y}+2\frac{y}{x}=\frac{1}{\left(\frac{y}{x}\right)}+2\left(\frac{y}{x}\right)$

$\frac{y}{x}=u$ として，$u'x+u=\frac{1}{u}+2u$

$u'x=\frac{1}{u}+u=\frac{1+u^2}{u}$ より　$\frac{u}{1+u^2}u'=\frac{1}{x}$（変数分離形）

$\int\frac{u}{1+u^2}du=\int\frac{1}{x}dx$

$\frac{1}{2}\ln|1+u^2|=\ln|x|+C$

$\ln|1+u^2|=\ln x^2+\ln \varepsilon^C$

$1+u^2=x^2C$

$u^2=Cx^2-1$

$u=\frac{y}{x}$ を代入して，$y^2=Cx^4-x^2$

②　$y'=\frac{-1}{\left(\frac{y}{x}\right)}+2$

$\frac{y}{x}=u$ として，$u'x+u=-\frac{1}{u}+2$

$u'x=-\frac{1}{u}+2-u=\frac{-(u-1)^2}{u}$

$\frac{-u}{(u-1)^2}u'=\frac{1}{x}$（変数分離形）

$\int\left\{\frac{1}{u-1}+\frac{1}{(u-1)^2}\right\}du=-\int\frac{1}{x}dx$

$\ln|u-1|-\frac{1}{u-1}=-\ln|x|+C$

$\ln|x(u-1)|=\frac{1}{u-1}+C$

$x(u-1)=C\cdot\varepsilon^{\frac{1}{y-1}}$

$u=\frac{y}{x}$ を代入して，

$y-x=C\cdot\varepsilon^{\frac{x}{y-x}}$ より，$y=C\cdot\varepsilon^{\frac{x}{y-x}}+x$

4．①　式(13.4)より，$y=C\cdot\varepsilon^{-\int-\frac{1}{2}dx}=C\varepsilon^{\frac{x}{2}}$

②　式(13.7)より，$y=\varepsilon^{-\int(-1)dx}\left(\int\varepsilon^{\int(-1)dx}xdx+C\right)$

$y=\varepsilon^{x}\left(\int\varepsilon^{-x}\cdot xdx+C\right)=\varepsilon^{x}\left(-\varepsilon^{-x}\cdot x+\int\varepsilon^{-x}dx+C\right)$

$=\varepsilon^x(-\varepsilon^{-x}x-\varepsilon^{-x}+C)=C\varepsilon^x-x-1$

5. $y(x)=f(x)z(x)$ とおくと

$y'=fz'+f'z$

$y''=fz''+2f'z'+f''z$

式(1)は，$fz''+z'(2f'+pf)+z(qf+f''+pf')=0$

式(2)へ変形するために，$2f'+pf=0$

式(13.4)より，$f=\varepsilon^{-\int\frac{p}{2}dx}=\varepsilon^{-\frac{px}{2}}$

これを，z の項に代入する．

$$qf+f''+pf'=f\left(q-\frac{p^2}{4}\right)$$

$$fz''+z'0+z\left(q-\frac{p^2}{4}\right)f=0$$

$$z''+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)z=0$$

6. ① 式(13.11)より，

$$y=\iint x^2\varepsilon^x dxdx+C_1x+C_2=\int\left(x^2\varepsilon^x-\int 2x\varepsilon^x\right)dx+C_1x+C_2$$

$$=\int\left\{x^2\varepsilon^x-2\left(\varepsilon^x x-\int\varepsilon^x dx\right)\right\}dx+C_1x+C_2=x^2\varepsilon^x-\int 2x\varepsilon^x dx-2\left(\varepsilon^x x-\int\varepsilon^x dx\right)$$

$$+2\varepsilon^x+C_1x+C_2=x^2\varepsilon^x-2\left(x\varepsilon^x-\int\varepsilon^x dx\right)-2\varepsilon^x x+2\varepsilon^x+2\varepsilon^x+C_1x+C_2$$

$$=\varepsilon^x(x^2-4x+6)+C_1x+C_2$$

② $y=\varepsilon^x z(x)$ とすると，$z''+4z=0$ の標準形となる．これは，式(13.17)における $q=4>0$ ($\lambda^2=4$) である．式(13.24)より，

$$y=\varepsilon^x z(x)=\varepsilon^x(C_1\sin 2x+C_2\cos 2x)$$

7. 式(13.4)より，

$$i=A\varepsilon^{-\int\frac{1}{RC}dt}=A\varepsilon^{-\frac{t}{RC}}=\frac{E}{R}\varepsilon^{-\frac{t}{RC}}\quad i=\frac{E}{R}\varepsilon^{-\frac{t}{RC}}$$

$t=0$ のとき，$i=\dfrac{E}{R}$ より，$A=\dfrac{E}{R}$ となる．

(注)RC 直列回路の方程式は，$Ri+\dfrac{q}{C}=E$ である．この式を t で微分して，$i=\dfrac{dq}{dt}$ を代入すると $R\dfrac{di}{dt}+\dfrac{1}{C}i=0$ が得られる．

また，もとの方程式に $i=\dfrac{dq}{dt}$ を代入すると，演習問題 15.3 の 3(215 ページ)の式となる．