第 15 章　ラプラス変換

演習問題 15.1

1.　①　$\mathcal{L}[t^n]=\dfrac{n\,!}{s^{n+1}}$ より，$\mathcal{L}[t^2]=\dfrac{2}{s^3}$

②　$\mathcal{L}[\cos at]=\dfrac{s}{s^2+a^2}$，$\mathcal{L}[\sin at]=\dfrac{a}{s^2+a^2}$ より，

$$\mathcal{L}[\cos at+\sin at]=\frac{s}{s^2+a^2}+\frac{a}{s^2+a^2}=\frac{s+a}{s^2+a^2}$$

2.　$(1-at)\varepsilon^{-at}=\varepsilon^{-at}-at\varepsilon^{-at}$ よって，

$$\mathcal{L}[(1-at)\varepsilon^{-at}]=\mathcal{L}[\varepsilon^{-at}]-\mathcal{L}[at\varepsilon^{-at}]$$

ここで，与えられた $\mathcal{L}$ を用いると，

$$\mathcal{L}[(1-at)\varepsilon^{-at}]=\frac{1}{s+a}-\frac{a}{(s+a)^2}=\frac{s}{(s+a)^2}$$

3.　$\sin t\cos t=\dfrac{1}{2}\cdot 2\sin t\cos t=\dfrac{1}{2}\sin 2t$　（加法定理）

$\mathcal{L}[\sin t\cos t]=\dfrac{1}{2}\mathcal{L}[\sin 2t]$，ここで与えられた $\mathcal{L}$ を用いると，

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}[\sin 2t]=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{s^2+2^2}\right)=\frac{1}{s^2+4}$$

演習問題 15.2

1.　①　$\dfrac{3}{s(s+2)^2}=\dfrac{A}{s}+\dfrac{B}{s+2}+\dfrac{C}{(s+2)^2}$ として，A，B，C を求める．

$A=\dfrac{3}{4}$，$B=-\dfrac{3}{4}$，$C=-\dfrac{3}{2}$

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{4s}-\frac{3}{4}\,\frac{1}{(s+2)}-\frac{3}{2}\,\frac{1}{(s+2)^2}\right]=\frac{3}{4}-\frac{3}{4}\varepsilon^{-2t}-\frac{3}{2}+t\varepsilon^{-2t}$$

②　$\dfrac{s+3}{s(s-5)(s+2)}=\dfrac{A}{s}+\dfrac{B}{s-5}+\dfrac{C}{s+2}$ として A，B，C を求める．

$A=-\dfrac{3}{10}$，$B=\dfrac{8}{35}$，$C=\dfrac{1}{14}$

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{3}{10s}+\frac{8}{35(s-5)}+\frac{1}{14(s+2)}\right]=-\frac{3}{10}+\frac{8}{35}\varepsilon^{5t}+\frac{1}{14}\varepsilon^{-2t}$$

③　$\dfrac{as^2+a^3}{s(s+a)^3}=\dfrac{A}{s}+\dfrac{B}{s+a}+\dfrac{C}{(s+a)^2}+\dfrac{D}{(s+a)^3}$ として，A，B，C，D を求める．

$A=1$，$B=-1$，$C=0$，$D=-2a^2$

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}-\frac{1}{s+a}-\frac{2a^2}{(s+a)^3}\right]=1-\varepsilon^{-at}-a^2t^2\varepsilon^{-at}$$

演習問題 15.3

1．　与式の関係を 2 階の導関数にあてはめると，

$$\mathcal{L}[f''(t)]=s\mathcal{L}[f'(t)]-f'(0)=s\{s\mathcal{L}[f(t)]-f(0)\}-f'(0)=s^2\mathcal{L}[f(t)]-sf(0)-f'(0)$$

2．　両辺をラプラス変換すると

$$\mathcal{L}[y''(t)]+4\mathcal{L}[y'(t)]=\mathcal{L}[1]$$

$$s^2\mathcal{L}[y(t)]-sy(0)-y'(0)+4\{s\mathcal{L}[y(t)]-y(0)\}=\mathcal{L}[1]$$

$$s^2Y(s)-3s+2+4sY(s)-12=\frac{1}{s}$$

$$Y(s)\{s^2+4s\}=\frac{1}{s}+3s+10$$

$$Y(s)=\frac{\frac{1}{s}+3s+10}{s^2+4s}=\frac{3s^2+10s+1}{s^2(s+4)}=\frac{39}{16s}+\frac{1}{4s^2}+\frac{9}{16(s+4)}$$

よって，$y=\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]=\dfrac{39}{16}+\dfrac{1}{4}t+\dfrac{9}{16}\varepsilon^{-4t}$

3．　$\mathcal{L}[q]=Q$ として与えられた式の両辺をラプラス変換すると

$\dfrac{E}{s}=R\{sQ-q(0)\}+\dfrac{Q}{C}$，ここで $q(0)=0$ より

$$\frac{E}{s}=sRQ+\frac{Q}{C}$$

$$Q=\frac{E}{s}\cdot\frac{1}{sR+\frac{1}{C}}=\frac{E}{R}\cdot\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s+\frac{1}{RC}}=CE\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\frac{1}{RC}}\right)$$

$$\mathcal{L}^{-1}[Q]=q=CE(1-\varepsilon^{-\frac{t}{RC}})$$

$$i=\frac{dq}{dt}=CE\left(\frac{1}{RC}\varepsilon^{-\frac{t}{RC}}\right)=\frac{E}{R}\varepsilon^{-\frac{t}{RC}}$$

章末問題 15

1．　① $\mathcal{L}[t^2-2]=\dfrac{2}{s^3}-\dfrac{2}{s}=\dfrac{2-2s^2}{s^3}$

② $\mathcal{L}[\cos 2t\cos 3t]=\dfrac{1}{2}\mathcal{L}[\cos 5t+\cos t]=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{s}{s^2+25}+\dfrac{s}{s^2+1}\right)=\dfrac{s(s^2+13)}{(s^2+25)(s^2+1)}$

③ $\mathcal{L}[4\varepsilon^{-5t}]=4L[\varepsilon^{-5t}]=\dfrac{4}{s+5}$

④ $\mathcal{L}[2-2\varepsilon^{-t}]=\dfrac{2}{s}-2\dfrac{1}{s+1}=\dfrac{2}{s(s+1)}$

⑤ $\mathcal{L}[\varepsilon^{at}-\varepsilon^{bt}]=\dfrac{1}{s-a}-\dfrac{1}{s-b}=\dfrac{a-b}{(s-a)(s-b)}$

⑥ $\mathcal{L}[(at^2+bt+c)\varepsilon^{-xt}]=\dfrac{2a}{(s+x)^3}+\dfrac{b}{(s+x)^2}+\dfrac{c}{s+x}$

2．①　$\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{s+1}{(s-2)(s+3)}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{1}{s-2}+\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{1}{s+3}\right]=\dfrac{3}{5}\varepsilon^{2t}+\dfrac{2}{5}\varepsilon^{-3t}$

②　$\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2(s+a)}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{a^2}\left(\dfrac{1}{s+a}-\dfrac{s-a}{s^2}\right)\right]$

$$=\frac{1}{a^2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+a}-\frac{1}{s}+\frac{a}{s^2}\right]=\frac{1}{a^2}(\varepsilon^{-at}-1+at)$$

③　$\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{s}{(s+a)^2}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s+a}-\dfrac{a}{(s+a)^2}\right]=\varepsilon^{-at}-at\varepsilon^{-at}=(1-at)\varepsilon^{-at}$

④　$\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{(s+a)^2+b^2}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{b}\cdot\dfrac{b}{(s+a)^2+b^2}\right]=\dfrac{1}{b}\varepsilon^{-at}\sin bt$

⑤　$\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{s}{(s-2)^2+1}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{s-2}{(s-2)^2+1}+\dfrac{2}{(s-2)^2+1}\right]=\varepsilon^{2t}(\cos t+2\sin t)$

⑥　$\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{5s+4}{s(s+2)}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{2}{s}+\dfrac{3}{s+2}\right]=2+3\varepsilon^{-2t}$

3．①　両辺をラプラス変換すると，

$\mathcal{L}[y''(t)]+6\mathcal{L}[y'(t)]+\mathcal{L}[10y]=0$

$s^2Y(s)-2s-2+6sY(s)-12+10Y(s)=0$

$Y(s)(s^2+6s+10)=2s+14$

$Y(s)=\dfrac{2s+14}{s^2+6s+10}=\dfrac{2(s+3)}{(s+3)^2+1}+\dfrac{8}{(s+3)^2+1}$

$\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]=y=2\varepsilon^{-3t}(\cos t+4\sin t)$

②　両辺をラプラス変換すると

$\mathcal{L}[y''(t)]-\mathcal{L}[y'(t)]-\mathcal{L}[12y]=\mathcal{L}[2]$

$s^2Y(s)-s-(sY(s)-1)-12Y(s)=\dfrac{2}{s}$

$Y(s)(s^2-s-12)=\dfrac{s^2-s+2}{s}$

$Y(s)=\dfrac{s^2-s+2}{s(s+3)(s-4)}=-\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{s}+\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{s+3}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{s-4}$

$\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]=y=-\dfrac{1}{6}+\dfrac{2}{3}\varepsilon^{-3t}+\dfrac{1}{2}\varepsilon^{4t}$

4．$\mathcal{L}[i]=I(s)$ として，与式の両辺をラプラス変換する．

$L\{sI(s)-i(0)\}+(R_1+R_2)I(s)=0$

$t=0$ のとき，$i=\dfrac{E}{R_1}$ より，$i(0)=\dfrac{E}{R_1}$

$$I(s)=\frac{L\cdot\dfrac{E}{R_1}}{Ls+R_1+R_2}=\frac{E}{R_1}\frac{1}{s+\dfrac{R_1+R_2}{L}}$$

$\mathcal{L}^{-1}[I(s)]=i=\dfrac{E}{R_1}\varepsilon^{-\frac{R_1+R_2}{L}t}$