

5章演習問題の解答

1. 材料力学の概要と関連分野

問題1

テキスト 5.1 節 参照

問題2

テキスト 5.1 節 参照

2. 材料力学の基本用語

問題1

テキスト 5.2.2 項 参照

問題2

(a) 垂直応力 (b) せん断応力

問題3

○応力

テキスト 5.3.2 項 参照

○許容応力

テキスト 5.3.2 項 参照

○ひずみ

テキスト 5.3.2 項 参照

○ヤング率(弾性係数)

テキスト 5.3.2 項 参照

3. 単純応力とひずみ

問題1

(1) 2.04 (kgf) (2) 102 (kgf/cm²) (3) 49 (MPa) (4) 2.1×10⁴ (kgf/mm²)

(5) ニュートンの第2法則 (F=Mg, g=9.8 m/s²) から

$$1 \text{ (kgf)} = 1 \text{ (kg)} \times 9.8 \text{ (m/s}^2\text{)} = 9.8 \text{ (kg} \cdot \text{m/s}^2\text{)} = 9.8 \text{ (N)}$$

問題2

47.8 (MPa) 2.78×10⁻⁴ 172(GPa)

問題3

Aタイプ全長の伸び λ_A は

$$\begin{aligned}\lambda_A &= \lambda_1 + \lambda_2 \\ &= \frac{4PL}{\pi d^2 E} + \frac{16PL}{\pi d^2 E} = \frac{20PL}{\pi d^2 E}\end{aligned}$$

B タイプ全長の伸び λ_B は

$$\begin{aligned}\lambda_B &= \lambda_1 + \lambda_2 \\ &= \frac{PL}{\pi d^2 E} + \frac{8PL}{\pi d^2 E} = \frac{9PL}{\pi d^2 E}\end{aligned}$$

A タイプの伸びは B タイプの伸びの 20/9 倍である

問題 4

全長の伸び λ は各部の伸びの総和となり

$$\begin{aligned}\lambda &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ &= \frac{8P_1L}{\pi d^2 E} + \frac{4(P_1 - P_2)L}{\pi d^2 E} + \frac{8P_1L}{\pi d^2 E} = \frac{4(5P_1 - P_2)L}{\pi d^2 E}\end{aligned}$$

問題 5

全体の伸び λ は

$$\lambda = \int_0^L d\lambda = \int_0^L \frac{\gamma}{E} x dx = \frac{\gamma}{E} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^L = \frac{\gamma L^2}{2E}$$

丸棒の自重に荷重 P が追加されたときの全体の伸び λ は

$$\lambda = \frac{\gamma L^2}{2E} + \frac{PL}{AE}$$

問題 6

円柱および円筒の応力 σ_1 , σ_2 および縮み λ_1 , λ_2 は

$$\sigma_1 = \frac{E_1}{A_1 E_1 + A_2 E_2} P \quad \sigma_2 = \frac{E_2}{A_1 E_1 + A_2 E_2} P \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \frac{PL}{A_1 E_1 + A_2 E_2}$$

問題 7

$$P \geq \pi d t \tau$$

問題 8

$$\text{隙間の無い } 0 \text{ (mm)} \quad -49.5 \text{ (MPa)}$$

問題 9

$$\sigma_1 = \frac{-A_2 E_1 E_2 (\alpha_1 - \alpha_2) (t_2 - t_1)}{A_1 E_1 + A_2 E_2} \quad \sigma_2 = \frac{A_1 E_1 E_2 (\alpha_1 - \alpha_2) (t_2 - t_1)}{A_1 E_1 + A_2 E_2}$$

問題 10

○引張りに対する伸び剛性

引張られた時の伸びにくさを表す量 (伸び剛性) : AE
他に

せん断のしにくさを表す量（せん断剛性）： AG

ねじりにくさを表す量（ねじり剛性）： GI_p

曲げにくさを表す量（曲げ剛性）： EI

ここで、 A は断面積、 I_p は断面二次極モーメント、 I は断面二次モーメントで、いずれも断面に関する幾何学的特性値である。（5.5.2 項 参照）

○安全率

構造部材が破壊や変形をしない応力（許容応力）と、これが破壊や変形をする応力（基準応力、または極限応力、破損応力ともいう）との比を安全率と呼び、次式で示される。

$$\underline{\text{「安全率」} = \text{「基準応力」} / \text{「許容応力」}} \quad (\text{安全率} > 1)$$

ここで、許容応力は設計上許容される最大応力であり、設計の条件（材料や荷重条件など）により決められる。また、基準応力は構造部材の性質（引張り強さなど）により決まる応力である。

○降伏点

応力-ひずみ線図において、形状がもとに戻る弾性変形域を超えると、応力は増加せずにひずみだけが增加する塑性変形域に移る。この弾性変形ができなくなる点を降伏点と呼び、降伏現象は材料を構成している結晶粒界がずれるために発生する。

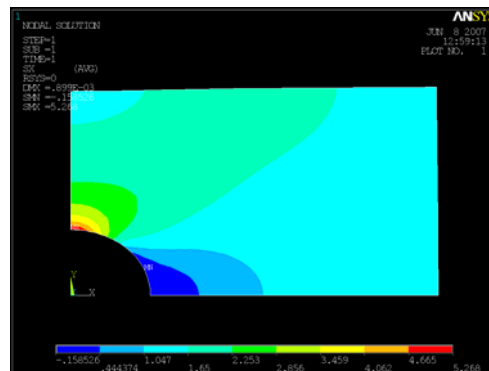
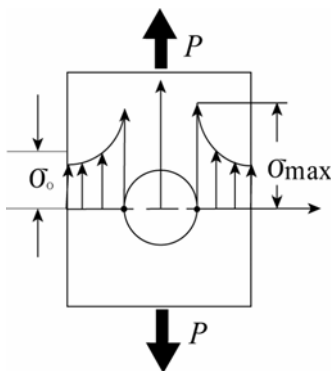
○応力集中

単純な平板や丸棒のような形状の部材であれば、その応力は一様であるが、部材に穴や切欠きなどがあり形状が変化すると、その部分で応力分布が乱れ、一般に局部的に高い応力が加わる。このような現象を応力集中といい、機械部品などの破損の原因になりやすい。

応力集中を表現するために最大応力 σ_{\max} を、基準とする公称応力 σ_0 （応力集中がないとした最小断面積から求めた応力）で除した値を用い、この値を応力集中係数という。

（式(2.2)では $\sigma_{\max} = \sigma$ として穴あき平板の最大応力 σ を示している）

$$\text{「応力集中係数 } \alpha \text{」} = \text{「最大応力 } \sigma_{\max} \text{」} / \text{「基準（公称）応力 } \sigma_0 \text{」}$$



左図を90度回転したときの右上部対称1/4領域の解析モデル

4. 組合せ応力とひずみ

問題 1

$$\sigma_n = \frac{P \cos \theta}{A / \cos \theta} = \cos^2 \theta \frac{P}{A} \quad \tau = \frac{-P \sin \theta}{A / \cos \theta} = -\sin \theta \cos \theta \frac{P}{A} = -\frac{1}{2} \sin 2\theta \frac{P}{A}$$

問題 2

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2 \theta \quad \tau = -\frac{\sigma_x}{2} \sin 2\theta$$

垂直応力 σ_n とせん断応力 τ は

$$74.6 \text{ N/mm}^2 (\text{MPa}) \quad -43.1 \text{ N/mm}^2 (\text{MPa})$$

θ を負としたとき、垂直応力 σ_n とせん断応力 τ は

$$74.6 \text{ N/mm}^2 (\text{MPa}) \quad 43.1 \text{ N/mm}^2 (\text{MPa})$$

σ_n の最大値は $\theta = 0^\circ$ のとき

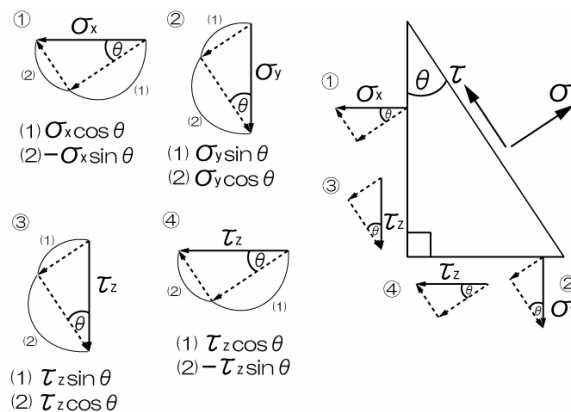
$$99.5 \text{ N/mm}^2 (\text{MPa})$$

$\tau_{\max} = -\tau_{\min}$ $\theta = -45^\circ (= 135^\circ)$ のとき

$$49.8 \text{ N/mm}^2 (\text{MPa})$$

問題 3

次図参照



式(5.17)と式(5.19)は、ある位置の応力状態が垂直応力 σ_x 、 σ_y とせん断応力 τ_{xy} ($\equiv \tau_z$) で与えられたとき、 x 軸と θ 傾いた面の応力状態がこの3つの応力成分で表すことができることを示している。

問題 4

式(5.18)と式(5.20)を導く (手順省略)

問題 5

式(5.21)と式(5.22)を導く (手順省略)

問題 6

式(5.23)を導く (手順省略)

問題 7

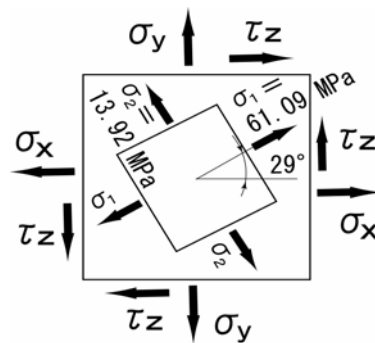
$\theta = 30^\circ$ をなす面では
 43.75MPa -10.83MPa
 $\theta = -30^\circ$ をなす面では
 43.75MPa 10.83MPa

問題 8

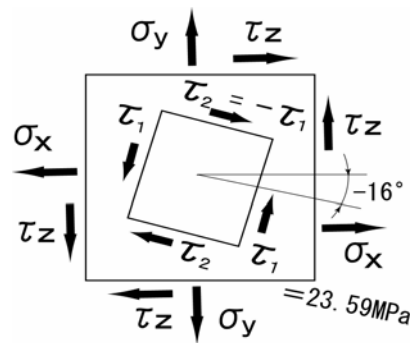
$\theta = 30^\circ$ をなす面では
 61.07MPa -0.83MPa
 $\theta = -30^\circ$ をなす面では
 26.43MPa 20.83MPa

問題 9

主応力 σ_1, σ_2 は $61.09, 13.92\text{MPa}$
 主応力 σ_1 の方向は 29°
 主応力 σ_1, σ_2 の様子を図示すると次図のようになる.



主せん断応力 τ_1, τ_2 は $\pm 23.59\text{MPa}$
 主せん断応力 τ_1 の方向は -16°
 主せん断応力 τ_1, τ_2 の様子を図示すると次図のようになる.



5. 曲げによる応力と変形

問題 1 (1)

$$\bar{y} = \frac{\int_0^h y \frac{b}{h} (h-y) dy}{\frac{bh}{2}} = \frac{2}{h^2} \int_0^h (hy - y^2) dy = \frac{2}{h^2} \left\{ h \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^h - \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^h \right\} = \frac{h}{3}$$

問題 1 (2)

$$\bar{y} = \frac{A_1 \times \bar{y}_1 - A_2 \times \bar{y}_2}{A} = \frac{300 \times 5 - 100 \times 7.5}{200} = 3.75$$

問題 1 (3)

$$\bar{y} = \frac{A_1 \times \bar{y}_1 + A_2 \times \bar{y}_2}{A} = \frac{tb \times \frac{t}{2} + (h-t)t \times \left[t + \frac{(h-t)}{2} \right]}{tb + (h-t)t} = \frac{tb + h^2 - t^2}{2(b+h-t)}$$

問題 1 (4)

$$\bar{y} = \frac{A_1 \times \bar{y}_1 + A_2 \times \bar{y}_2}{A} = \frac{th \times \frac{h}{2} + (b-t)t \times \frac{t}{2}}{th + (b-t)t} = \frac{h^2 + (b-t)t}{2(b+h-t)}$$

$$\bar{x} = \frac{A_1 \times \bar{x}_1 + A_2 \times \bar{x}_2}{A} = \frac{th \times \frac{t}{2} + (b-t)t \times \left(t + \frac{(b-t)}{2} \right)}{th + (b-t)t} = \frac{b^2 + t(h-t)}{2(b+h-t)}$$

問題 1 (5)

$$\bar{y} = \frac{\int y dA}{\int dA} = \frac{\int_0^\pi \int_0^r (\rho \sin \theta) (\rho d\theta d\rho)}{\int_0^\pi \int_0^r \rho d\theta d\rho} = \frac{\frac{r^3}{3} \int_0^\pi \sin \theta d\theta}{\frac{r^2}{2} \int_0^\pi d\theta} = \frac{2r}{3\pi} [-\cos \theta]_0^\pi = \frac{4r}{3\pi}$$

問題 1 (6)

$$\bar{y} = 4.36 \quad \bar{x} = 8.13$$

問題 2 (1)

断面一次モーメント (S_x , S_y) は図心 (重心) を求めるときに利用する。

断面二次モーメント (I_x , I_y) は変形のしにくさを表す量。

断面係数 (Z_1 , Z_2) は曲げ強さを表す量。

断面二次半径 (k_x , k_y) は圧縮材や曲げ材の座屈のしにくさを表す量。

断面二次極モーメント (I_p) は部材のねじれにくさを表す量。

問題 2 (2)

$$I_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 dA = b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 dy = b \left[\frac{1}{3} y^3 \right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = b \left(\frac{h^3}{24} + \frac{h^3}{24} \right) = \frac{1}{12} bh^3$$

問題 2 (3)

$$I_x = \frac{BH^3}{12} - \frac{bh^3}{12} = \frac{BH^3 - bh^3}{12}$$

問題 2 (4)

$$I_x = \frac{1}{12}bh^3 - \frac{(b-t)(h-2t)^3}{12} = \frac{1}{12}\{bh^3 - (b-t)(h-2t)^3\}$$

$$I_y = \frac{2tb^3 + (h-2t)t^3}{12} = \frac{2tb^3 + ht^3 - 2t^4}{12} = \frac{t(2b^3 + ht^2 - 2t^3)}{12}$$

問題 2 (5)

与えられた凹形図形の対称性から、外側 $b \times h$ の図形を添字の 1 を用いてその面積を A_1 、図に示す上端部から x 軸に平行なこの図形の図心を通るまでの距離を e_1 とし、内側 $(b-2t) \times (h-t)$ の図形を添字の 2 を用いてその面積を A_2 、図に示す上端部から x 軸に平行なこの図形の図心を通るまでの距離を e_2 とする。

$$e = \frac{S_x}{A} = \frac{A_1 \times e_1 - A_2 \times e_2}{A}$$

ここで $A = A_1 - A_2$

$A_1 = bh$, $A_2 = (b-2t)(h-t) = BH$ とすると

$$A = bh - BH$$

となる。ここで x 軸に平行な凹形図形の上端部の軸を x' 軸とすると、この x' 軸から分割した各図形の x 軸に平行な図心を通るまでの距離 e_1 と e_2 は

$$e_1 = \frac{h}{2} \quad e_2 = \frac{h-t}{2} = \frac{H}{2}$$

となる。よって、この x' 軸からこの凹形図形の図心を通る x 軸までの距離 e は

$$e = \frac{bh \times \frac{h}{2} - BH \times \frac{H}{2}}{bh - BH} = \frac{\frac{bh^2}{2} - \frac{BH^2}{2}}{bh - BH} = \frac{bh^2 - BH^2}{2(bh - BH)}$$

となる。よって断面二次モーメント I_x は

$$I_x = \frac{bh^3 - BH^3}{3} - \frac{(bh^2 - BH^2)^2}{4(bh - BH)}$$

問題 2 (6)

省略

問題 3

$$Z = \frac{xy^2}{6} \frac{x(d^2 - x^2)}{6} = \frac{d^2x - x^3}{6}$$

$$\frac{dZ}{dx} = \frac{1}{6}(d^2 - 3x^2) = 0$$

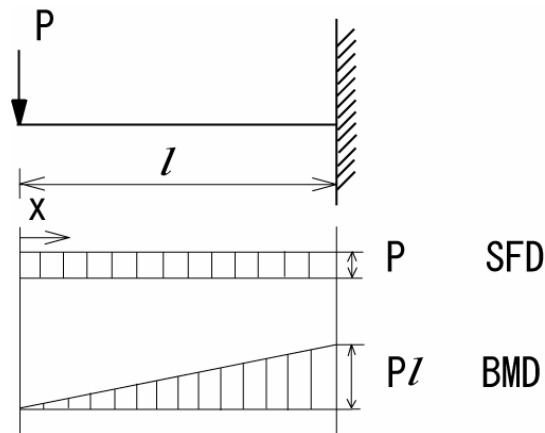
より

$$x = \frac{\sqrt{3}}{3}d \quad y = \frac{\sqrt{6}}{3}d$$

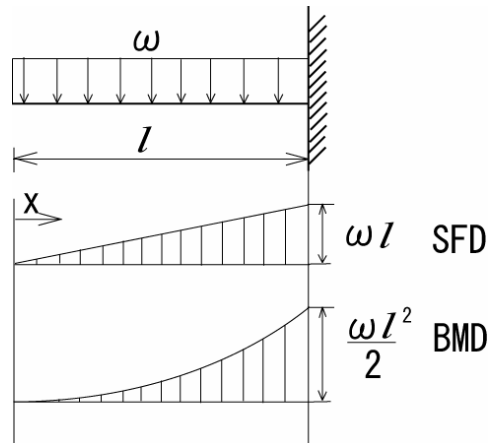
ここで $x : y = 1 : \sqrt{2}$ である.

これは紙加工仕上げ寸法の A 列, B 列で示される縦横比と同じである. (紙の長手方向を半分に折ると呼び番号が下位の紙の横手方向の寸法になる)

問題 4 (1)



問題 4 (2)



問題 4 (3)

$(0 \leq x < b)$ のとき

$$F_x = P \quad \dots\dots\dots ①$$

$$M_x = Px \quad \dots\dots\dots ②$$

$(b < x \leq l)$ のとき

$$F_x = P + w(x - b) \quad \dots\dots\dots ③$$

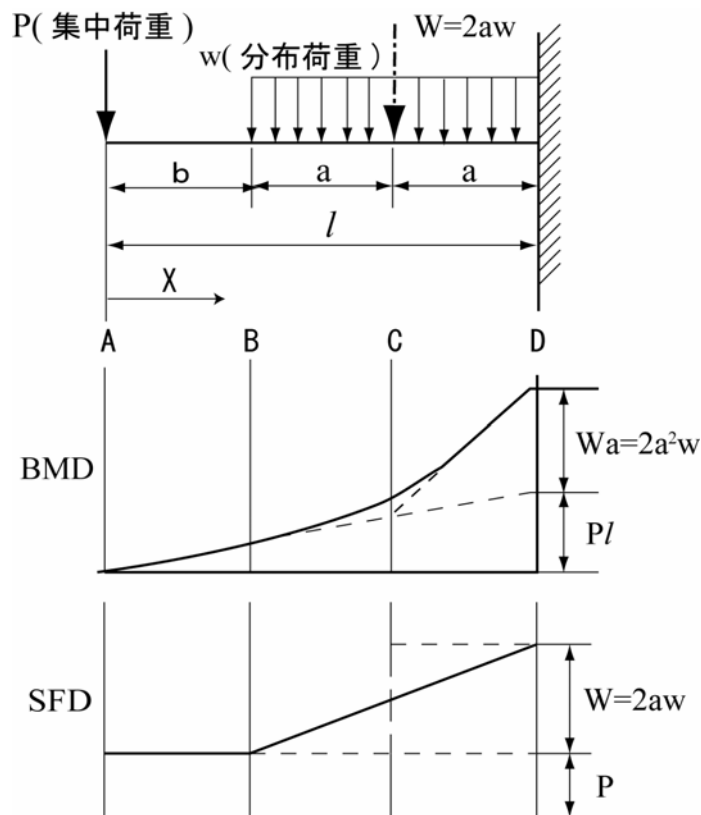
$$M_x = Px + \frac{1}{2}w(x - b)^2 \quad \dots\dots\dots ④$$

となる. 式③と④より固定端($x = l$)において

$$F_l = P + w(l - b) = P + 2wa = P + W \quad \dots\dots\dots ⑤$$

$$M_l = Pl + \frac{1}{2}w(l - b)^2 = Pl + 2wa^2 = Pl + Wa \quad \dots\dots\dots ⑥$$

となる. よって, SFD と BMD は次図の実線で示される図になる.



(別解)

分布荷重を C 点 ($x=b+a$) に作用する集中荷重 $W=2wa$ に置き換えて、任意の x 断面の左側を片持ちはりとなすと BMD と SFD は図中の点線で示すものとなる。このとき SFD は C 点において W だけ段が付き、BMD は C 点において折れ曲がる。

この後、AB 間 ($0 \leq x < b$) と D 点 ($x=l$) では点線が真の BMD と SFD であるから、BD 間 ($b < x \leq l$) だけを SFD は式③で、BMD は式④で改めれば実線で示される上の図になる。

問題 5 (1)

はりの左端を原点 ($x=0$) とすると、左端から任意の距離 x の位置における曲げモーメント M_x は次式で与えられる。

$$M_x = P(l-x) \dots\dots\dots ①$$

図 5-16 における曲率半径 ρ のたわみ曲線より、このときの変形量を微小としたとき、高次の項は微量で省略できるので、たわみ曲線の曲率は式(5.45)の次式で与えられる。

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M_x}{EI} \dots\dots\dots ②$$

式①を②に代入すれば

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{P(l-x)}{EI} \dots\dots\dots ③$$

となる。得られた式③の両辺を積分すると

$$EI \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2} Px^2 + Plx + C_1 \dots\dots\dots ④$$

となる。さらに式④の両辺を積分すると

$$EIy = -\frac{1}{6} Px^3 + \frac{1}{2} Plx^2 + C_1x + C_2 \dots\dots\dots ⑤$$

が得られ、このときの境界条件は、固定端 ($x=0$) におけるたわみ δ_0 とたわみ角 ϕ_0 がそれぞれ 0 (零) なので、これらの条件を式④と⑤に代入すれば

$$C_1 = 0, C_2 = 0 \dots\dots\dots ⑥$$

が得られる、よってたわみ角 $\frac{dy}{dx}$ は

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-Px^2 + 2Plx}{2EI} \dots\dots\dots ⑦$$

となる。また、たわみ y は

$$y = \frac{-Px^3 + 3Plx^2}{6EI} \dots\dots\dots ⑧$$

となり、A点 ($x=l$) における最大たわみ δ_A とたわみ角 ϕ_A は次式のようになる。

$$\delta_A = \frac{Pl^3}{3EI} \quad \phi_A = \frac{Pl^2}{2EI}$$

問題 5 (2)

左端から任意の距離 x の位置における曲げモーメント M_x は

$$M_x = M$$

以下前問と同様にして解くと

$$\delta_A = \delta_{\max} = \frac{Ml^2}{2EI} \quad \phi_A = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{\max} = \frac{Ml}{EI}$$

問題 5 (3)

左端から任意の距離 x の位置における曲げモーメント M_x は

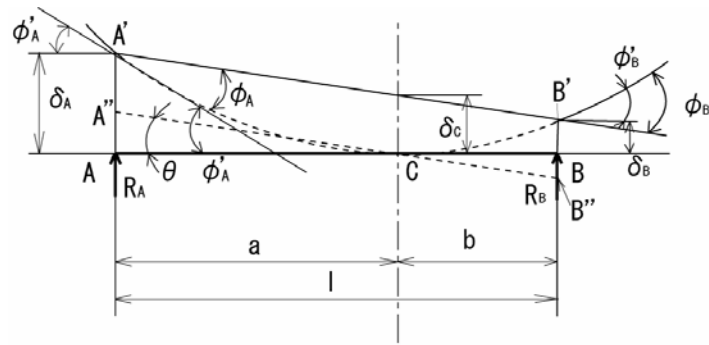
$$M_x = \frac{w(l-x)^2}{2}$$

以下前問と同様にして解くと

$$\delta_A = \delta_{\max} = \frac{wl^4}{8EI} \quad \phi_A = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{\max} = \frac{wl^3}{6EI}$$

問題 6 (1)

つりあい条件から、式 (5.53) が求まる。つぎに、はり AB を C 点で左右に分け、 CA と CB はともに C 点を固定端とする片持ちはりを見ると、次図のようになる。



すなわち A, B を自由端とし R_A, R_B を外力と見て、片持ちはりの弾性曲線を求めると、点線 $A'CB'$ である。このとき δ_A と δ_B は式 (5.50) から

$$\delta_A = R_A a^3 / 3EI \dots \dots \dots \textcircled{1}$$

$$\delta_B = R_B b^3 / 3EI \dots \dots \dots \textcircled{2}$$

ところが $(\delta_A - \delta_C) : (\delta_C - \delta_B) = a : b$ であるから

$$\delta_C = \frac{b\delta_A + a\delta_B}{l} = \frac{ab}{3EI} (R_A a^2 + R_B b^2) \dots \dots \dots \textcircled{3}$$

となり、式③に式 (5.53) を代入すると、式 (5.54) が得られる。

このとき $\delta_A \neq \delta_B$ であり、はりは傾いているので、計算上の ϕ に対して補正すると A' と B' とのたわみ角は式 (5.50) から

$$\phi'_A = R_A a^2 / 2EI \dots \dots \dots \textcircled{4}$$

$$\phi'_B = R_B b^2 / 2EI \dots \dots \dots \textcircled{5}$$

になる、また、 $A'B'$ 線の傾き角 θ は

$$\theta = (\delta_A - \delta_B) / l \dots \dots \dots \textcircled{6}$$

であるから、求める ϕ_A と ϕ_B は

$$\phi_A = \phi'_A - \theta \dots \dots \dots \textcircled{7}$$

$$\phi_B = \phi'_B + \theta \dots \dots \dots \textcircled{8}$$

となる。式⑦と⑧に式④～⑥を代入すれば、次式⑨で示される式(5.55)が求められる。

$$\left. \begin{aligned} \phi_A &= \frac{ab(l+b)}{6EI} P \\ \phi_b &= -\frac{ab(l+a)}{6EI} P \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \textcircled{9}$$

問題 6 (2)

設問の図は左右対称であるから、中央で分割して左半分だけ考えると、中央の点 C を固定端とし、 A を自由端とする長さ $l/2$ の片持ちはりである。

また左右対称であるから、式(5.56)が求まる。そこで $R_A = wl/2$ を外力と見て式(5.50)と(5.52)を用いて、 A 点の上向きたわみを求めれば

$$\delta_A = -\frac{R_A}{3EI} \left(\frac{l}{2}\right)^3 - \frac{w}{8EI} \left(\frac{l}{2}\right)^4 = \frac{5wl^4}{16 \times 24EI} = \frac{5wl^4}{384EI}$$

となり、これはすなわち式(5.52)の δ_C である。また片持ちとしての A 点のたわみ角 ϕ_A は、式(5.50)と(5.52)から

$$\phi_A = \frac{R_A}{2EI} \left(\frac{l}{2}\right)^2 - \frac{w}{6EI} \left(\frac{l}{2}\right)^3 = \frac{wl^3}{24EI}$$

となる。これは式(5.58)である。

問題 6 (3)

省略

6. ねじりによる応力と変形

問題 1

$$T = \frac{60P}{2\pi N} = \frac{60 \times 5 \times 10^3}{2 \times \pi \times 1.5 \times 10^3} = \frac{100}{\pi} = 31.8(N \cdot m)$$

問題 2

$$d = \sqrt[3]{\frac{16T}{\pi\tau}} = \sqrt[3]{\frac{16 \times 31.8 \times 10^3}{\pi \times 100}} = 11.7(mm)$$

問題 3

$$T = \tau Z_p = 75 \times \frac{\pi}{16} \times 25^3 = 230.1(N \cdot m)$$

問題 4

丸棒（中実軸）および中空軸の半径（軸外面の半径）を r_s ，中空軸内孔の半径を r_0 とするとき、これらの軸の断面二次極モーメント I_p は式(5.32) で示される。

中実軸の場合は、微小面積が $rd\theta dr$ で表されることから、それぞれの積分範囲を用いて式(5.66) で示される次式が求まる。

$$I_p = \int_A r^2 dA = \int_A r^2 rd\theta dr = \int_0^{r_s} r^3 dr \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{r_s^4}{4} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{2} r_s^4$$

中空軸の場合は、半径方向の積分範囲が次式のように変わるだけなので、同様にして式(5.67)で示される次式が求まる。

$$I_p = \int_A r^2 dA = \int_A r^2 rd\theta dr = \int_{r_0}^{r_s} r^3 dr \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{r_s^4 - r_0^4}{4} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{2} (r_s^4 - r_0^4)$$

問題5

曲げモーメント M によって生じる引張りと圧縮応力（曲げ応力） σ の最大値は式(5.41)により求まる。なお、このときの直径 d の軸の断面係数 Z は式(5.36)から求められるので、 σ の最大値は次式のように表される。

$$\sigma = \frac{M}{Z} = \frac{32M}{\pi d^3} \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

また、ねじりによって生じるせん断応力（ねじり応力） τ の最大値は式(5.65)より求まる。なお、このときの直径 d の軸の極断面係数 Z_p は式(5.66)から求められるので、 τ の最大値は次式のように表される。

$$\tau = \frac{T}{Z_p} = \frac{16T}{\pi d^3} \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

この問題は、式①と②の応力の組み合わせ状態を求めるものであるので、式(5.23)で示される次式

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_z^2} \\ \sigma_2 &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_z^2} \\ \tau_{\max} &= \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_z^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

に $\sigma_x = \sigma$, $\sigma_y = 0$, $\tau_z = \tau$ を代入すると

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_z^2} = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{16M}{\pi d^3} + \sqrt{\left(\frac{16M}{\pi d^3}\right)^2 + \left(\frac{16T}{\pi d^3}\right)^2} = \frac{16}{\pi d^3} (M + \sqrt{M^2 + T^2}) \\
&= \frac{32}{\pi d^3} \left(\frac{M + \sqrt{M^2 + T^2}}{2}\right) \dots\dots\dots ④
\end{aligned}$$

したがって、 $\sigma_1 = M_e / Z$ であらわせる M_e (相当曲げモーメント) は次式で与えられる。

$$M_e = \frac{M + \sqrt{M^2 + T^2}}{2} \dots\dots\dots ⑤$$

同様にして

$$\begin{aligned}
\tau_{\max} &= \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_z^2} = \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \\
&= \frac{16}{\pi d^3} \sqrt{M^2 + T^2} \dots\dots\dots ⑥
\end{aligned}$$

したがって、 $\tau_{\max} = T_e / Z_p$ であらわせる T_e (相当ねじりモーメント) は次式で与えられる。

$$T_e = \sqrt{M^2 + T^2} \dots\dots\dots ⑦$$

式⑤と⑦の意味するところは、 M と T がそれぞれ単独で負荷されたときの応力 σ と τ を求める式①と②が、 M と T が組み合わせられた状態でも、式⑤と⑦の M_e (相当曲げモーメント) と T_e (相当ねじりモーメント) を用いることで使えることである。

設計で用いるときは、このときの σ と τ が材料の曲げに対する許容応力 σ_a とせん断に対する許容応力 τ_a 以下になるように直径 d を定め、その大きい方を採用すればよいことになる。

$$\sigma_1 \leq \sigma_a, \quad \tau_{\max} \leq \tau_a$$

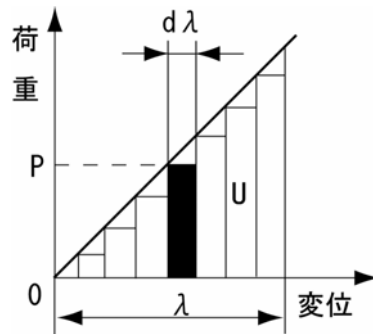
7. ひずみエネルギー

問題 1

弾性体の棒に力が作用して変形すると、その力によってなされる仕事は棒中にひずみエネルギーとして蓄えられる。変形するときに発熱などのエネルギー損失が無いような弾性変形の場合には、そのひずみエネルギー U は次のように計算される。

次図に示すように、ある荷重 P のとき変位が $d\lambda$ だけ微小に増加すると、その間に荷重のなす仕事 dW は $Pd\lambda$ となる。よって、 λ まで変形したときの仕事 W は

$$W = \int_0^\lambda P d\lambda \cdots \cdots \cdots \textcircled{1}$$



となる。また、この荷重によってなされる仕事は棒の中にひずみエネルギー U として蓄えられるので

$$U = W = \int_0^\lambda P d\lambda \cdots \cdots \cdots \textcircled{2}$$

となる。ここで、棒の断面積を A 、長さを L とすると $P = \sigma A$ 、 $d\lambda = L d\varepsilon$ より

$$U = AL \int_0^\varepsilon \sigma d\varepsilon \cdots \cdots \cdots \textcircled{3}$$

となる。よって、応力とひずみは比例する ($\sigma = E\varepsilon$) ことから、単位体積あたりのひずみエネルギー U_0 は

$$U_0 = \frac{U}{AL} = \int_0^\varepsilon \sigma d\varepsilon = \int_0^\varepsilon E\varepsilon d\varepsilon = \frac{1}{2} E\varepsilon^2 = \frac{1}{2} \sigma\varepsilon \cdots \cdots \cdots \textcircled{4}$$

と表される。この式は棒以外の弾性体でも同様に成立する。

問題 2

問題 1 より弾性体の単位体積あたりのひずみエネルギー U_0 は

$$U_0 = \frac{1}{2} \sigma\varepsilon \cdots \cdots \cdots \textcircled{1}$$

と表されるので、全体積に蓄えられるひずみエネルギー U は式①を体積で積分して

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma\varepsilon dV \cdots \cdots \cdots \textcircled{2}$$

となる。図 5-8 の (b) では

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma_x \varepsilon_x dV \dots \dots \dots \textcircled{3}$$

となり，図 5-8 の(c)では

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma_y \varepsilon_y dV \dots \dots \dots \textcircled{4}$$

となる．よって，図 5-8 の(a)の平面応力に対して，ひずみエネルギー U は

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y) dV \dots \dots \dots \textcircled{5}$$

と表される．また

$$\int_V dV = V \dots \dots \dots \textcircled{6}$$

であるから，単位体積 V あたりのひずみエネルギー U_0 は

$$U_0 = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y) \dots \dots \dots \textcircled{7}$$

となり，式 (5.14) の関係式より

$$\varepsilon_x = (\sigma_x - \nu \sigma_y) / E, \varepsilon_y = (\sigma_y - \nu \sigma_x) / E \dots \dots \dots \textcircled{8}$$

であるから，式⑧を式⑦に代入すると

$$U_0 = \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\nu \sigma_x \sigma_y)$$

となる．式 (5.15) の関係式より

$$\sigma_x = \frac{E(\varepsilon_x - \nu \varepsilon_y)}{1 - \nu^2}, \sigma_y = \frac{E(\varepsilon_y - \nu \varepsilon_x)}{1 - \nu^2} \dots \dots \dots \textcircled{9}$$

を用いてこの式⑨を式⑦に代入すると

$$U_0 = \frac{E}{2(1 - \nu^2)} (\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 - 2\nu \varepsilon_x \varepsilon_y) \dots \dots \dots \textcircled{10}$$

となり，式 (5.71) が求められる．

問題 3

問題 1 と式(5.68)より

$$U_0 = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{E} = \frac{1}{2} \varepsilon^2 E = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon \quad \dots \dots \dots \textcircled{1}$$

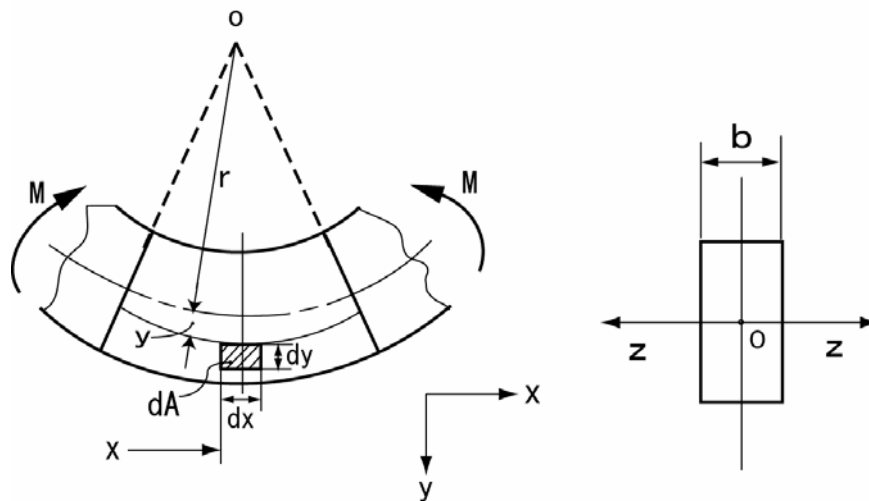
モーメント M を受ける棒に生じる応力 σ とひずみ ε を用いると、棒全体のひずみエネルギー U は

$$U = \frac{1}{2} \int \sigma \varepsilon dV = \frac{1}{2E} \int \sigma^2 dV \quad \dots \dots \dots \textcircled{2}$$

となる。式中の応力 σ は、式(5.39)より

$$\sigma = \frac{M}{I} y \quad \dots \dots \dots \textcircled{3}$$

である。また、式②の微小体積 dV は次図の座標系を用いると



$$dV = b dx dy \quad \dots \dots \dots \textcircled{4}$$

であるから、式③と式④を式②に適用すると

$$U = \frac{1}{2E} \iint \left(\frac{My}{I} \right)^2 b dx dy = \frac{b}{2EI^2} \int M^2 dx \int y^2 dy \quad \dots \dots \dots \textcircled{5}$$

となる。式中の断面二次モーメント I は式(5.30)より

$$I = b \int y^2 dy \quad \dots \dots \dots \textcircled{6}$$

であるから、式⑥と式⑤より

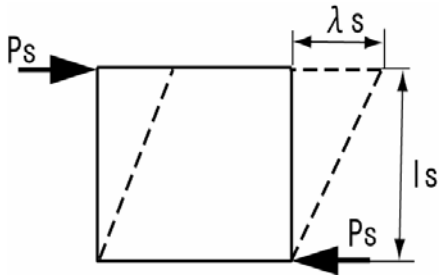
$$U = \frac{1}{2EI^2} I \int M^2 dx = \frac{1}{2EI} \int M^2 dx \dots\dots\dots ⑦$$

である。よって、曲げモーメント M を受けるときのひずみエネルギー U は

$$U = \frac{M^2 l}{2EI} \dots\dots\dots ⑧$$

となる。

問題 4



上図に示すように、力 P_s が作用する時のせん断ひずみ γ は式 (5.9) より

$$\gamma = \frac{\lambda s}{l_s} \dots\dots\dots ①$$

で示される。このときのひずみエネルギー U は

$$U = \frac{1}{2} P_s \lambda s \dots\dots\dots ②$$

と表されるので、 P_s が作用する上図の左面の面積を A とすると、単位体積 ($A \times l_s$) あたりのエネルギー U_0 は

$$U_0 = \frac{P_s \lambda s}{2 A l_s} = \frac{1}{2} \tau \gamma \dots\dots\dots ③$$

となる。またせん断応力 τ は式 (5.10) より

$$\tau = G \gamma \dots\dots\dots ④$$

であるから、式④より式③は

$$U_0 = \frac{1}{2} G \gamma^2 = \frac{\tau^2}{2G} \dots\dots\dots ⑤$$

となる。よって、ねじりの場合のひずみエネルギー U は

$$U = \int U_0 dV = \int \frac{\tau^2}{2G} dV \dots \dots \dots \textcircled{6}$$

と表されるので、丸棒内の任意の点におけるせん断応力 τ は、式 (5.64) より

$$\tau = \gamma G = r\theta G \dots \dots \dots \textcircled{7}$$

で与えられるので、式 (5.62) から

$$\theta = \frac{T}{GI_p} \dots \dots \dots \textcircled{8}$$

と式⑦を用いると、せん断応力 τ は

$$\tau = \frac{Tr}{I_p} \dots \dots \dots \textcircled{9}$$

となる。このとき、任意の点における微小面積を dA 、その長さを dx とすると式⑥は

$$U = \frac{1}{2G} \int_0^l \int_A \left(\frac{Tr}{I_p} \right)^2 dA dx = \frac{T^2}{2GI_p^2} \int_0^l dx \int_A r^2 dA \dots \dots \dots \textcircled{10}$$

となる。ここで式 (5.32) より

$$I_p = \int_A r^2 dA \dots \dots \dots \textcircled{11}$$

であるから、式⑩は

$$U = \frac{T^2}{2GI_p} \int_0^l dx = \frac{T^2 l}{2GI_p} \dots \dots \dots \textcircled{12}$$

と表される。

問題 5

0.62(mm) 12.4 (N · m)

問題 6

(1) 自重のみの場合

$$U = \int_0^l dU = \int_0^l \frac{(Ax\gamma)^2}{2AE} dx = \frac{A\gamma^2 l^3}{6E}$$

(2) 自重に荷重 P が加えられた場合

$$U = \int_0^l \frac{P^2 + 2P(Ax\gamma) + (Ax\gamma)^2}{2AE} dx = \frac{P^2 l}{2AE} + \frac{Pl^2 \gamma}{2E} + \frac{A\gamma^2 l^3}{6E}$$

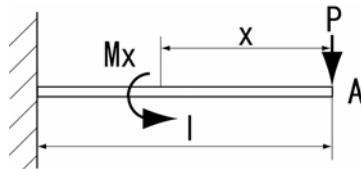
となり、右辺の第1項は荷重 P によるひずみエネルギー、第2項は相互作用によるひずみエネルギー、第3項は自重によるひずみエネルギーである。{(全ひずみエネルギー) = (荷重 P 分) + (相互作用分) + (自重分)}

よって同一種類の荷重が作用するとき、ひずみエネルギー U は重ね合わせの原理が適用出来ない(相互作用分のひずみエネルギーが増加する)ということがわかる。

これは、ひずみエネルギーが応力(または、ひずみ)の2次式で与えられるためである。

問題 7

(a)



A 点におけるたわみ δ_A は式(5.80)より

$$\frac{\partial U}{\partial P} = \delta_A \quad \dots \dots \dots \textcircled{1}$$

で求まる。はりの任意の点 x での曲げモーメントを M_x とすると

$$M_x = Px \quad \dots \dots \dots \textcircled{2}$$

となり、曲げモーメント M_x を受けるときのひずみエネルギー U は式(5.77)より

$$U = \int_0^l \frac{M_x^2}{2EI} dx \quad \dots \dots \dots \textcircled{3}$$

であるから、式②を式③に代入すると

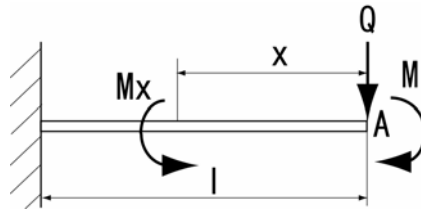
$$U = \int_0^l \frac{(Px)^2}{2EI} dx = \frac{P^2 l^3}{6EI} \quad \dots \dots \dots \textcircled{4}$$

となるので、式④と式①より、自由端 A 点におけるたわみ δ_A は

$$\delta_A = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{Pl^3}{3EI} \quad \dots \dots \dots \textcircled{5}$$

となる。

(b)



図に示すように A 点に仮想的に荷重 Q がかけるとすれば、A 点におけるたわみ δ_A は式(5.80)より

$$\frac{\partial U}{\partial Q} = \delta_A \quad \dots \dots \dots \text{①}$$

となる。任意の点 x での曲げモーメントを M_x としたとき

$$M_x = M + Qx \quad \dots \dots \dots \text{②}$$

であるから、曲げモーメント M_x を受けるときのひずみエネルギー U は式(5.77)より

$$U = \frac{1}{2EI} \int_0^l M_x^2 dx \quad \dots \dots \dots \text{③}$$

となるので、式③に式②を代入すると

$$U = \frac{1}{2EI} \int_0^l (M + Qx)^2 dx = \frac{1}{2EI} \left(M^2 l + QMl^2 + \frac{Q^2 l^3}{3} \right) \quad \dots \dots \dots \text{④}$$

となるので、式④と式①より、自由端 A 点におけるたわみ δ_A は

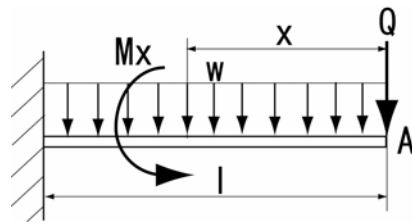
$$\delta_A = \frac{\partial U}{\partial Q} = \frac{1}{2EI} \left(Ml^2 + \frac{2}{3} Ql^3 \right) \quad \dots \dots \dots \text{⑤}$$

となる。このとき $Q=0$ であるから式⑤より自由端 A 点におけるたわみ δ_A は

$$\delta_A = \frac{Ml^2}{2EI}$$

となる。

(c)



上図に示すように A 点に仮想的に荷重 Q が加かるとすれば、A 点におけるたわみ δ_A は式(5.80)より

$$\frac{\partial U}{\partial Q} = \delta_A \quad \dots \dots \dots \text{①}$$

となり、任意の点 x での曲げモーメントを M_x としたとき

$$M_x = \frac{1}{2}wx^2 + Qx \quad \dots \dots \dots \text{②}$$

となる。また曲げモーメント M_x を受けるときのひずみエネルギー U は式(5.77)より

$$U = \frac{1}{2EI} \int_0^l M_x^2 dx \quad \dots \dots \dots \text{③}$$

となり、式③に式②を代入すると

$$U = \frac{1}{2EI} \int_0^l \left(\frac{wx^2}{2} + Qx \right)^2 dx = \frac{1}{2EI} \left(\frac{w^2 l^5}{20} + \frac{wQl^4}{4} + \frac{Q^2 l^3}{3} \right) \quad \dots \dots \dots \text{④}$$

となる。式④と式①より、自由端 A 点におけるたわみ δ_A は

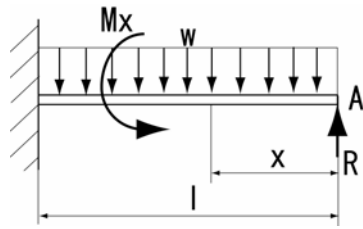
$$\delta_A = \frac{\partial U}{\partial Q} = \frac{1}{2EI} \left(\frac{wl^4}{4} + \frac{2Ql^3}{3} \right) \quad \dots \dots \dots \text{⑤}$$

となるが、このとき $Q=0$ であるから式⑤より自由端 A 点におけるたわみ δ_A は

$$\delta_A = \frac{wl^4}{8EI} \quad \dots \dots \dots \text{⑥}$$

となる。

問題 8



上図において A 点におけるたわみ δ_A は支持端なので、式(5.80)より

$$\delta_A = \frac{\partial U}{\partial R} = 0 \quad \dots \dots \dots \textcircled{1}$$

で求まる. はりの任意の点 x における曲げモーメント M_x は

$$M_x = \frac{1}{2}wx^2 - Rx \quad \dots \dots \dots \textcircled{2}$$

と表せるので、式(5.77)より

$$U = \frac{1}{2EI} \int_0^l M^2 dx \quad \dots \dots \dots \textcircled{3}$$

であるから、式③に式②を代入すると

$$U = \frac{1}{2EI} \int_0^l \left(\frac{1}{2}wx^2 - Rx \right)^2 dx = \frac{1}{2EI} \left(\frac{w^2 l^5}{20} - \frac{wRl^4}{4} + \frac{R^2 l^3}{3} \right) \quad \dots \dots \dots \textcircled{4}$$

となるので、式④を式①に適用すると

$$\delta_A = \frac{\partial U}{\partial R} = \frac{1}{2EI} \left(-\frac{wl^4}{4} + \frac{2Rl^3}{3} \right) = 0 \quad \dots \dots \dots \textcircled{5}$$

となるので、式⑤より A 点の反力 R を求めると

$$-\frac{wl^4}{4} + \frac{2Rl^3}{3} = 0 \quad \dots \dots \dots \textcircled{6}$$

より

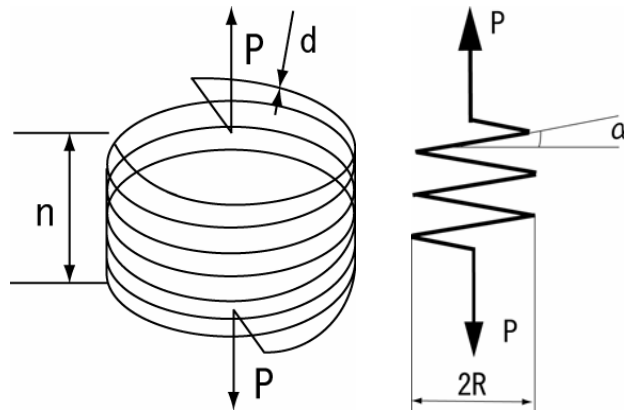
$$R = \frac{3wl}{8}$$

が得られる.

問題 9

次図に示すらせん角 α により，線材に加わるばねのねじりモーメント T は

$$T = PR \cos \alpha \cdot \dots \dots \dots \textcircled{1}$$



となり，モーメントのつり合いからコイルの線材には次式で示される曲げモーメント M が加わる．

$$M = PR \sin \alpha \cdot \dots \dots \dots \textcircled{2}$$

このらせん角 α が小さいときは，ねじりモーメント T のみを考慮すればよく，式①は

$$T = PR \cdot \dots \dots \dots \textcircled{3}$$

であるから，このときのひずみエネルギー U は問題 4 で求めた式 (5.73) より

$$U = \frac{T^2 l}{2GI_p} = \frac{P^2 R^2 l}{2GI_p} \cdot \dots \dots \dots \textcircled{4}$$

で求まる．このとき線材の長さ l は図より

$$l = 2\pi nR \cdot \dots \dots \dots \textcircled{5}$$

であり，断面二次極モーメント I_p は式 (5.66) より

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32} \cdot \dots \dots \dots \textcircled{6}$$

であるから，コイルばねに蓄えられるひずみエネルギー U は

$$U = \frac{P^2 R^2 \times 2\pi n R}{2G \times \frac{\pi d^4}{32}} = \frac{32P^2 R^3 n}{Gd^4} = \frac{32P^2 R^3 n}{Gd^4} \dots \dots \dots \textcircled{7}$$

となる。また、荷重点のたわみを δ とすると荷重 P によるエネルギー（外力のばね） W は式 (5.70) より

$$W = \frac{P}{2} \delta \dots \dots \dots \textcircled{8}$$

であり、外力の仕事はひずみエネルギーに等しいので式 (5.70) より

$$W = U \dots \dots \dots \textcircled{9}$$

である。式⑦と式⑧は等しいので

$$\frac{32P^2 R^3 n}{Gd^4} = \frac{P}{2} \delta \dots \dots \dots \textcircled{10}$$

となる。よって

$$\delta = \frac{64nPR^3}{Gd^4} \dots \dots \dots \textcircled{11}$$

となる。ばね定数 k は単位長さの変位を与えるときに必要な力であるから

$$k = \frac{P}{\delta} = \frac{Gd^4}{64nR^3} \dots \dots \dots \textcircled{12}$$

と求まる。

8. 振動の基礎

問題 1

5.8.2 項 参照

問題 2

振動系に減衰などのエネルギー消費がないとすれば、系の全エネルギー E は運動エネルギー T と位置エネルギー U との和*として次式①で表される。

$$T + U = E \quad (\text{一定}) \dots \dots \dots \textcircled{1}$$

図 5-20 と 5-21 に示すばね-質量系では平衡点から x だけ変位すると、運動エネルギー T は次式②で表される。

$$T = \int m\dot{x}dx = \int m\ddot{x} \frac{dx}{dt} dt = \int \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m\dot{x} \cdot \dot{x} \right) dt = \int d \left(\frac{1}{2} m\dot{x} \cdot \dot{x} \right) = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 \quad \dots\dots\dots ②$$

また、重力による位置エネルギー (mgx) は静たわみの項 ($\delta = mg/k$) と相殺するので、位置エネルギー U は平衡点から x だけ変位するばねの位置エネルギーのみを考えればよいので次式③で表される。

$$U = \int kx dx = \frac{1}{2} kx^2 \quad \dots\dots\dots ③$$

式①, ②, ③より次式④が得られる。

$$\frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2 = E \quad \dots\dots\dots ④$$

④式の両辺を時間微分してエネルギーの変化率を求めると、次式⑤が得られる。

$$m\ddot{x} \cdot \dot{x} + kx \cdot \dot{x} = \dot{x}(m\ddot{x} + kx) = 0 \quad \dots\dots\dots ⑤$$

ここで $\dot{x} \neq 0$ とすれば式 (5.89) である次式⑥が得られる。

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad \dots\dots\dots ⑥$$

式⑥の解は式 (5.82) または式 (5.91) など表されるので、式 (5.82) を適用してこれを式⑦とすると、次式⑧が得られる。

$$x = A \cos(\omega_n t - \phi) \quad \dots\dots\dots ⑦$$

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = -A\omega_n \sin(\omega_n t - \phi)$$

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega_n^2 \cos(\omega_n t - \phi) \quad \dots\dots\dots ⑧$$

式⑦と式⑧を式⑥に代入すれば次式⑨が得られる。

$$-m\omega_n^2 + k = 0 \quad \dots\dots\dots ⑨$$

したがって、この方程式の固有角振動数 ω_n は

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

となり、固有振動数 f_n は

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

となる。

* : 仕事をする能力をエネルギーといい、力学問題では運動エネルギー T と位置エネルギー U に分類される。物体が力学現象だけの運動をするとき、力学的エネルギーは保存され、これらの和は一定となる（力学的エネルギー保存の法則）。また、この仕事の量は経路に無関係で、最初と最後の条件だけで決まる。

ただし、力学の中でよく扱う摩擦力は、熱や変形などの他のエネルギーに変換されるため、力学的エネルギーは保存されない。そして、摩擦力のなす仕事の量は経路に依存する。

問題 3

27.6(Hz)

問題 4

5.8.2 参照

共振現象

- ・ 電車の走行中に車体が大きく揺れるときや車体の一部から振動による音を発生するとき。

など

問題 5

・ 管楽器（発生させた振動数と管の気柱の固有振動数が一致したとき共振して、特定の大きな音が出る）

・ 人間の音声（声帯で空気振動を発生させ、口の中の形を変えて特定の音を出す）

・ 圧電振動子（固有振動数を制御して音圧の特性を改良する）

など

問題 6

$$\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\phi_2 - \phi_1)} \quad \tan \phi = \frac{A_1 \sin \phi_1 + A_2 \sin \phi_2}{A_1 \cos \phi_1 + A_2 \cos \phi_2}$$

よって角振動数の等しい二つの振動を合成すると、得られた合成振動は周期振動となり、その角振動数は合成前の二つの角振動数に等しくなる。

* : 付録 3 の数学基本公式の三角関数の合成を参照

問題 7

ばね-質量系の運動方程式は次式①で表され

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \dots\dots\dots ①$$

式①のこの微分方程式は $x = \cos \omega_n t$ および $x = \sin \omega_n t$ の2つの解をもつことが導かれる。また、それぞれの解に任意定数 A, B を掛けて線形結合した式②もまた式①の解（一般解）となる。

$$x = A \cos \omega_n t + B \sin \omega_n t \dots\dots\dots ②$$

式②より

$$\dot{x} = -\omega_n A \sin \omega_n t + \omega_n B \cos \omega_n t \dots\dots\dots ③$$

$$\ddot{x} = -\omega_n^2 A \cos \omega_n t - \omega_n^2 B \sin \omega_n t = -\omega_n^2 x \dots\dots\dots ④$$

初期条件 $t=0$ のとき、 $x = x_0$ 、 $\dot{x} = v_0$ よりこの条件を満たす A, B は

$$A = x_0 \qquad B = \frac{v_0}{\omega_n}$$

となる。よって運動の式②は次式⑤で表される。

$$x = x_0 \cos \omega_n t + \frac{v_0}{\omega_n} \sin \omega_n t \dots\dots\dots ⑤$$

式⑤を三角関数の合成から最大振幅を X 、初期位相を ϕ_0 とすると

$$x = X \cos(\omega_n t - \phi_0) \dots\dots\dots ⑥$$

と表される。三角関数の合成から

$$\sin \phi_0 = \frac{\frac{v_0}{\omega_n}}{\sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_n}\right)^2}} \qquad \cos \phi_0 = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_n}\right)^2}}$$

となるので

$$x = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_n}\right)^2} \cos(\omega_n t - \phi_0) \dots\dots\dots ⑦$$

よって式⑥の最大振幅 X と初期位相 ϕ_0 は

$$X = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_n}\right)^2} \quad \phi_0 = \tan^{-1}\left(\frac{v_0/\omega_n}{x_0}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{v_0}{\omega_n x_0}\right)$$

$$x_0 = 2(\text{mm}) \quad v_0 = 0.5(\text{m/s}) \quad \omega_n = 173.2(\text{rad/s}) \text{ より}$$

$$X = \sqrt{2^2 + \left(\frac{500}{173.2}\right)^2} = 3.51(\text{mm})$$

$$\phi_0 = \tan^{-1}\left(\frac{500}{173.2 \times 2}\right) = 55.3^\circ = 0.965(\text{rad})$$

また、加速度が最大となるのは式④から x が最大になるときより、最大加速度を α_{\max} とすると

$$\alpha_{\max} = \omega_n^2 X = 173.2^2 \times 3.51 \times 10^{-3} = 105.3(\text{m/s}^2)$$

となる

問題 8

運動エネルギー T は、自由端の集中質量とはりのエネルギーの和であるから次式①で表される。

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\delta}^2 + \frac{1}{2} \int_0^l \rho A dx \dot{y}^2 \quad \dots\dots\dots ①$$

ここで、自由端に集中荷重が働くときの静たわみ曲線は設問により与えられているので、これを微分すると次式②となる。

$$\dot{y} = \frac{1}{2} \dot{\delta} \left\{ 3 \left(\frac{x}{l}\right)^2 - \left(\frac{x}{l}\right)^3 \right\} \dots\dots\dots ②$$

式②より \dot{y}^2 は

$$\dot{y}^2 = \frac{1}{4} \dot{\delta}^2 \left\{ 9 \left(\frac{x}{l}\right)^4 - 6 \left(\frac{x}{l}\right)^5 + \left(\frac{x}{l}\right)^6 \right\} \dots\dots\dots ③$$

となる。式①の第 2 項は積分して、次式④となる。

$$\frac{1}{2} \int_0^l \rho A dx \dot{y}^2 = \frac{\rho A}{8} \dot{\delta}^2 \left[\frac{9}{5} \left(\frac{x^5}{l^4}\right) - \frac{x^6}{l^5} + \frac{1}{7} \left(\frac{x^7}{l^6}\right) \right]_0^l = \frac{33}{280} \rho A l \dot{\delta}^2 \dots\dots\dots ④$$

式④を式①代入すれば、式①の運動エネルギー T は次式⑤となる。

$$T = \frac{1}{2} \left(m + \frac{33}{140} \rho A l \right) \dot{\delta}^2 \dots\dots\dots ⑤$$

また、位置エネルギー U は次式⑥のように表される。

$$U = \frac{1}{2} k \delta^2 \dots\dots\dots ⑥$$

ここで、片持ちはりの自由端に荷重 P が負荷されたときの変位 δ は、式 (5.50) より次式⑦で表される。

$$\delta = \frac{Pl^3}{3EI} \dots\dots\dots ⑦$$

片持ちはりの自由端におけるこわさは、 $P = kx$ と考えると、次式⑧で表される。

$$k = \frac{3EI}{l^3} \dots\dots\dots ⑧$$

よって、位置エネルギー U は次式⑨のように表される。

$$U = \frac{3EI}{2l^2} \delta^2 \dots\dots\dots ⑨$$

減衰などのエネルギー消費がないとすれば、系の全エネルギー E は運動エネルギー T と位置エネルギー U との和として次式⑩で表されるので

$$T + U = E \quad (\text{定数}) \dots\dots\dots ⑩$$

式⑩に式⑤と⑨を代入すると

$$\frac{1}{2} \left(m + \frac{33}{140} \rho A l \right) \dot{\delta}^2 + \frac{3EI}{2l^2} \delta^2 = E \dots\dots\dots ⑪$$

となる。式⑪の両辺を微分すると

$$\left(m + \frac{33}{140} \rho A l \right) \dot{\delta} \ddot{\delta} + \frac{3EI}{l^2} \delta \dot{\delta} = 0 \dots\dots\dots ⑫$$

はりは振動しているから、 $\dot{\delta} \neq 0$ であるから式⑫は次式⑬となる。

$$\left(m + \frac{33}{140} \rho A l \right) \ddot{\delta} + \frac{3EI}{l^2} \delta = 0 \dots\dots\dots ⑬$$

したがって、このときの固有振動数 f_n は式(5.89)などから対比して、次式⑭で与えられる。

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\frac{3EI}{l^3}}{m + \frac{33}{140} \rho Al}} \dots\dots\dots \textcircled{14}$$

自由端に集中質量の無いはりの場合は、式⑭で $m = 0$ とすれば

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\frac{3EI}{l^3}}{\left(\frac{33}{140} \rho Al\right)}} = 3.568 \frac{1}{2\pi l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \dots\dots\dots \textcircled{15}$$

となるが、この値は式 (5.101) から得られた数学的解の固有振動数

$$f_n = \frac{\lambda_n^2}{2\pi l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$$

において、 $\lambda_1 = 1.875$ として計算すると

$$f_n = 3.516 \frac{1}{2\pi l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \dots\dots\dots \textcircled{16}$$

となる。式⑮と⑯を比較すると 1.5% 高いことがわかり、近似式として十分な精度をもって
いると考えられる。

本問での固有振動数は 1 自由度系で等価的に近似した値であり、2 次以上のモードの場合
はそのモードを考慮した近似を行うなどの取り扱いが必要になる。

9. 有限要素法の理論

問題 1

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{\textcircled{1}} + k_{\textcircled{2}} & -(k_{\textcircled{1}} + k_{\textcircled{2}}) \\ -(k_{\textcircled{1}} + k_{\textcircled{2}}) & k_{\textcircled{1}} + k_{\textcircled{2}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{\textcircled{1}} + k_{\textcircled{2}} & -(k_{\textcircled{1}} + k_{\textcircled{2}}) \\ -(k_{\textcircled{1}} + k_{\textcircled{2}}) & k_{\textcircled{1}} + k_{\textcircled{2}} \end{bmatrix}$$

問題 2

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{\textcircled{1}} + k_{\textcircled{2}} & -k_{\textcircled{1}} & -k_{\textcircled{3}} \\ -k_{\textcircled{1}} & k_{\textcircled{1}} + k_{\textcircled{2}} & -k_{\textcircled{2}} \\ -k_{\textcircled{3}} & -k_{\textcircled{2}} & k_{\textcircled{2}} + k_{\textcircled{3}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{\textcircled{1}} + k_{\textcircled{2}} & -k_{\textcircled{1}} & -k_{\textcircled{3}} \\ -k_{\textcircled{1}} & k_{\textcircled{1}} + k_{\textcircled{2}} & -k_{\textcircled{2}} \\ -k_{\textcircled{3}} & -k_{\textcircled{2}} & k_{\textcircled{2}} + k_{\textcircled{3}} \end{bmatrix}$$

問題 3

省略

問題 4

$$[N] = \begin{bmatrix} \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} & \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \end{bmatrix} \quad [B] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{x_2 - x_1} & \frac{1}{x_2 - x_1} \end{bmatrix}$$