第 3 章　静電気

復習問題

基本問題

1. 式(3･3)から，

$$F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\times\frac{Q_1Q_2}{r^2}\fallingdotseq 9\times10^9\times\frac{0.2\times0.5}{1^2}=\mathbf{9\times10^8}\ [\mathrm{N}]$$

2. 式(3･6)から，

$$E=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\fallingdotseq 9\times10^9\times\frac{Q}{r^2}=9\times10^9\times\frac{0.5}{1^2}=\mathbf{4.5\times10^9}\ [\mathrm{V/m}]$$

3. 式(3･19)から，

$$C=\frac{\varepsilon_0 S}{l}=8.854\times10^{-12}\times\frac{S}{l}=8.854\times10^{-12}\times\frac{2}{0.01}=17.71\times10^{-10}\ [\mathrm{F}]$$

$$=\mathbf{1.77\times10^{-3}}\ [\mu\mathrm{F}]$$

4. 直列にした場合の合成静電容量 C〔F〕は，式(3･28)から，

$$C=\frac{1}{\dfrac{1}{C_1}+\dfrac{1}{C_2}}=\frac{C_1\times C_2}{C_1+C_2}=\frac{(4\times10^{-6})\times(4\times10^{-6})}{4\times10^{-6}+4\times10^{-6}}=2\times10^{-6}\,[\mathrm{F}]=\mathbf{2}\ [\mu\mathrm{F}]$$

次に，並列にした場合の合成静電容量 C'〔F〕は，式(3･22)から，

$$C'=C_1+C_2=4\times10^{-6}+4\times10^{-6}=8\times10^{-6}\,[\mathrm{F}]=\mathbf{8}\ [\mu\mathrm{F}]$$

5. 並列にした場合の合成静電容量 C〔F〕は，式(3･22)から，

$$C=C_1+C_2=2\times10^{-6}+3\times10^{-6}=5\times10^{-6}\,[\mathrm{F}]=\mathbf{5}\ [\mu\mathrm{F}]$$

次に，直列にした場合の合成静電容量 C'〔F〕は，式(3･28)から，

$$C'=\frac{1}{\dfrac{1}{C_1}+\dfrac{1}{C_2}}=\frac{C_1\times C_2}{C_1+C_2}=\frac{(2\times10^{-6})\times(3\times10^{-6})}{2\times10^{-6}+3\times10^{-6}}=\frac{6}{5}\times10^{-6}$$

$$=1.2\times10^{-6}\,[\mathrm{F}]=\mathbf{1.2}\ [\mu\mathrm{F}]$$

6. 電圧は静電容量に反比例するから，50 V を 3 : 2 に分けた電圧が 2 μF と 3 μF のコンデンサに加わる。

したがって，2μF のコンデンサに加わる電圧 V_1〔V〕は，

$$V_1=\frac{3}{5}\times 50=\mathbf{30}\ \text{〔V〕}$$

7. 直列にした各コンデンサに加わる電圧は静電容量に反比例するから，4μF のコンデンサには 60V の電圧が加わる。

したがって，4μF のコンデンサに蓄えられる電荷の量 Q〔C〕は，

$$Q=C_1V_1=4\times 10^{-6}\times 60=\mathbf{2.4\times 10^{-4}}\ \text{〔C〕}$$

発展問題

1. 式(3･3)から，

$$F=9\times 10^9\times\frac{Q_1Q_2}{r^2}=9\times 10^9\times\frac{0.1\times 10^{-6}\times 0.2\times 10^{-6}}{(5\times 10^{-2})^2}=\mathbf{0.072}\ \text{〔N〕}$$

2. 1V の電位差は 1C の電荷が移動したときのエネルギーであるから，1.602×10⁻¹⁹C の電荷が移動すれば，**1.602×10^{-19}〔J〕**となる。

3. 点 a の電位を V_1〔V〕，点 b の電位を V_2〔V〕とすれば，

$$V_1=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_1}=9\times 10^9\times\frac{Q}{r_1}=9\times 10^9\times\frac{0.1\times 10^{-6}}{1}=9\times 10^2\ \text{〔V〕}$$

$$V_2=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_2}=9\times 10^9\times\frac{Q}{r_2}=9\times 10^9\times\frac{0.1\times 10^{-6}}{2}=4.5\times 10^2\ \text{〔V〕}$$

したがって，電位差 V_{12} は，

$$V_{12}=V_1-V_2=(9-4.5)\times 10^2=4.5\times 10^2=\mathbf{450}\ \text{〔V〕}$$

4. 電気力線の総本数 N〔本〕は，式(3･10)から，

$$N=\frac{Q}{\varepsilon_0}=\frac{Q_1+Q_2+Q_3}{\varepsilon_0}=\frac{(5-2+3)\times 10^{-6}}{8.854\times 10^{-12}}=\mathbf{6.78\times 10^5}\ \text{〔本〕}$$

5. 式(3･13)から，

$$D=\varepsilon E$$

$$\therefore\quad E=\frac{D}{\varepsilon}=\frac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_r}=\frac{1\times 10^{-6}}{8.854\times 10^{-12}\times 2}=\mathbf{5.65\times 10^4}\ \text{〔V/m〕}$$

6. 式(3･19)から，

$$C=\frac{\varepsilon S}{l}=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r S}{l}=8.854\times 10^{-12}\times\frac{\varepsilon_r S}{l}=8.854\times 10^{-12}\times\frac{4\times 500\times 10^{-4}}{1\times 10^{-3}}$$

$$=0.00177\times 10^{-6}\ \text{〔F〕}=\mathbf{0.00177}\ \text{〔μF〕}$$

7. まず，C_2 と C_3 の並列接続の合成静電容量 C'〔F〕は，

$$C'=C_2+C_3=4\times 10^{-6}+6\times 10^{-6}=10\times 10^{-6}\ \text{〔F〕}$$

この C' と C_1 の直列接続の合成静電容量 C_0〔F〕は,

$$C_0=\frac{1}{\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C'}}=\frac{C_1\times C'}{C_1+C'}=\frac{(15\times10^{-6})\times(10\times10^{-6})}{15\times10^{-6}+10\times10^{-6}}=\mathbf{6\times10^{-6}}\ \text{〔}\mathbf{F}\text{〕}$$

端子 ab 間に $V=125$〔V〕の電圧を加えたとき,端子 ab 間の合成静電容量 C_0 に蓄えられる電荷 Q〔C〕は,

$$Q=C_0V=6\times10^{-6}\times125=7.5\times10^{-4}\ \text{〔C〕}$$

この電荷 Q は,直列接続された各コンデンサに等量蓄えられるから,C_1 のコンデンサに蓄えられる電荷 Q_1 は,

$$Q_1=Q=\mathbf{7.5\times10^{-4}}\ \text{〔}\mathbf{C}\text{〕}$$

次に,C_2 と C_3 は並列になっているので,各コンデンサに蓄えられる電荷は,各コンデンサの容量に比例する。

したがって,C_2,C_3 に蓄えられる電荷 Q_2,Q_3〔C〕は,

$$Q_2=Q\times\frac{4}{10}=7.5\times10^{-4}\times\frac{4}{10}=\mathbf{3\times10^{-4}}\ \text{〔}\mathbf{C}\text{〕}$$

$$Q_3=Q\times\frac{6}{10}=7.5\times10^{-4}\times\frac{6}{10}=\mathbf{4.5\times10^{-4}}\ \text{〔}\mathbf{C}\text{〕}$$

次に,C_1 の電圧 V_1〔V〕は,

$$V_1=\frac{Q_1}{C_1}=\frac{7.5\times10^{-4}}{15\times10^{-6}}=\mathbf{50}\ \text{〔}\mathbf{V}\text{〕}$$

また,C_2 および C_3 の電圧 V_2〔V〕は,

$$V_2=125-50=\mathbf{75}\ \text{〔}\mathbf{V}\text{〕}$$

8. 全体の電圧を V_0〔V〕とし,各コンデンサに加わる電圧を V_1,V_2,V_3〔V〕とすれば,式(3･27)から,

$$V_1:V_2:V_3=\frac{1}{0.1}:\frac{1}{0.2}:\frac{1}{0.3}=6:3:2$$

の割合で電圧 V_0 を分担する。最大の電圧は 0.1 μF のコンデンサに加わり,これが 500 V でなければならないから,

$$V_0=500+500\times\frac{3}{6}+500\times\frac{2}{6}\fallingdotseq\mathbf{916.7}\ \text{〔}\mathbf{V}\text{〕}$$

チャレンジ問題

1. 重心 P から各頂点 A，B，C までの距離 a〔m〕は，

$$a=\frac{10\sqrt{3}}{3}\times10^{-2}\ \text{〔m〕}$$

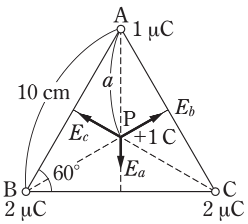
点 A の電荷による点 P の電界の強さ E_a〔V/m〕は，

$$E_a=\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 a^2}=9\times10^9\times\frac{Q}{a^2}$$

$$=9\times10^9\times\frac{1\times10^{-6}}{\left(\frac{10\sqrt{3}}{3}\times10^{-2}\right)^2}=2.7\times10^6\ \text{〔V/m〕}$$

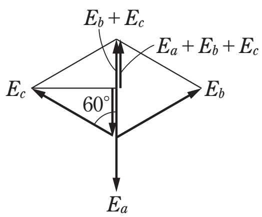
同様に，

$$E_b=E_c=\frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 a^2}=9\times10^9\times\frac{2\times10^{-6}}{\left(\frac{10\sqrt{3}}{3}\times10^{-2}\right)^2}=5.4\times10^6\ \text{〔V/m〕}$$



$$a=10\times10^{-2}\times\sin60^\circ\times\frac{2}{3}$$
$$=10\times10^{-2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2}{3}$$
$$=\frac{10\sqrt{3}}{3}\times10^{-2}\ \text{〔m〕}$$

解図 1



解図 2

したがって，点 P の電界の強さ E〔V/m〕は，

$$E=|\dot{E}_a+\dot{E}_b+\dot{E}_c|=|\dot{E}_b+\dot{E}_c|-|\dot{E}_a|$$

$$=2E_c\cos60^\circ-E_a=E_c-E_a=5.4\times10^6-2.7\times10^6=\mathbf{2.7\times10^6}\ \text{〔V/m〕}$$

2. 端子 ab 間に電圧 V_{ab} を加えて，端子 b の電位を 0，端子 a の電位を V_{ab} であるとする。いま，端子 ac 間の電圧を V_{ac}，cb 間の電圧を V_{cb}，ad 間の電圧を V_{ad}，db 間の電圧を V_{db} とすると，

$$V_{ac}:V_{cb}=\frac{1}{C_1}:\frac{1}{C_2}$$

$$V_{ad}:V_{db}=\frac{1}{C_3}:\frac{1}{C_4}$$

$$V_{ac}+V_{cb}=V_{ad}+V_{db}=V_{ab}$$

の関係があるから，

$$V_{cb}=\frac{V_{ab}}{\dfrac{1}{C_1}+\dfrac{1}{C_2}}\times\frac{1}{C_2}=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}\times\frac{1}{C_2}\times V_{ab}=\frac{C_1}{C_1+C_2}\times V_{ab}$$

$$V_{db}=\frac{V_{ab}}{\dfrac{1}{C_3}+\dfrac{1}{C_4}}\times\frac{1}{C_4}=\frac{C_3C_4}{C_3+C_4}\times\frac{1}{C_4}\times V_{ab}=\frac{C_3}{C_3+C_4}\times V_{ab}$$

したがって，端子 cd 間の電圧 V_{cd}〔V〕は，

$$V_{cd}=V_{cb}-V_{db}=\left(\frac{C_1}{C_1+C_2}-\frac{C_3}{C_3+C_4}\right)V_{ab}=\boldsymbol{\frac{C_1C_4-C_2C_3}{(C_1+C_2)(C_3+C_4)}\times V_{ab}}\ \text{〔}\mathbf{V}\text{〕}$$

3. A，B，C のコンデンサの静電容量をそれぞれ C_A，C_B，C_C とすると，題意より，次式が成立する。

$$\text{AとBの直列；}\frac{C_AC_B}{C_A+C_B}=1.2 \qquad \therefore \frac{C_A+C_B}{C_AC_B}=\frac{1}{1.2} \qquad (1)$$

$$\text{BとCの直列；}\frac{C_BC_C}{C_B+C_C}=1.5 \qquad \therefore \frac{C_B+C_C}{C_BC_C}=\frac{1}{1.5} \qquad (2)$$

$$\text{CとAの直列；}\frac{C_CC_A}{C_C+C_A}=2.0 \qquad \therefore \frac{C_C+C_A}{C_CC_A}=\frac{1}{2.0} \qquad (3)$$

式(1)＋式(2)＋式(3)から，

$$\frac{C_AC_C+C_BC_C+C_AC_B+C_CC_A+C_BC_C+C_AC_B}{C_AC_BC_C}=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.5}+\frac{1}{2.0}$$

$$=\frac{2.5+2+1.5}{3}=\frac{6}{3}=2$$

$$\therefore \quad \frac{2(C_AC_B+C_BC_C+C_CC_A)}{C_AC_BC_C}=2$$

$$\therefore \quad \frac{C_AC_B+C_BC_C+C_CC_A}{C_AC_BC_C}=1 \qquad (4)$$

式(4)－式(1)から，

$$\frac{C_AC_B+C_BC_C+C_CC_A}{C_AC_BC_C}-\frac{C_A+C_B}{C_AC_B}=1-\frac{1}{1.2}$$

$$\therefore \quad \frac{C_AC_B+C_BC_C+C_CC_A-(C_AC_C+C_BC_C)}{C_AC_BC_C}=\frac{0.2}{1.2}$$

$$\therefore \quad \frac{C_AC_B}{C_AC_BC_C}=\frac{0.2}{1.2} \qquad \therefore \quad C_C=\frac{1.2}{0.2}=\mathbf{6}\ \text{〔}\boldsymbol{\mu}\mathbf{F}\text{〕}$$

同様に，式(4)－式(2)から，

$$\frac{C_AC_B+C_BC_C+C_CC_A}{C_AC_BC_C}-\frac{C_B+C_C}{C_BC_C}=1-\frac{1}{1.5}=\frac{0.5}{1.5}$$

$$\therefore \quad \frac{C_B C_C}{C_A C_B C_C}=\frac{0.5}{1.5} \qquad \therefore \quad C_A=\frac{1.5}{0.5}=\mathbf{3}\ 〔\mathbf{\mu F}〕$$

式(4)－式(3)から，

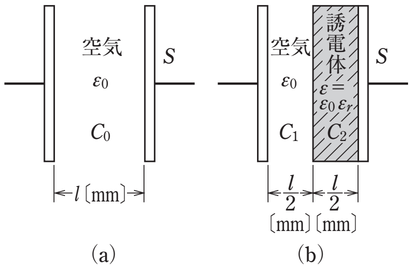
$$\frac{C_A C_B + C_B C_C + C_C C_A}{C_A C_B C_C}-\frac{C_C + C_A}{C_C C_A}=1-\frac{1}{2.0}=\frac{1}{2.0}$$

$$\therefore \quad \frac{C_C C_A}{C_A C_B C_C}=\frac{1}{2.0} \qquad \therefore \quad C_B=\mathbf{2.0}\ 〔\mathbf{\mu F}〕$$

4. 解図 3 (a)の静電容量 C_0 は，

$$C_0=\varepsilon_0\times\frac{S}{l}=1\ 〔\mu F〕$$

次に，図(b)のように，極板間に $\frac{l}{2}$〔mm〕の厚さで，比誘電率 $\varepsilon_r=3$ の誘電体を入れた場合には，２個のコンデンサの直列と考えられるから，各々の静電容量を C_1，C_2 とすれば，



解図 3

$$C_1=\varepsilon_0\times\frac{S}{\frac{l}{2}}=\varepsilon_0\times\frac{2S}{l}=2\,C_0$$

$$C_2=\varepsilon\times\frac{S}{\frac{l}{2}}=\varepsilon_0\varepsilon_r\times\frac{2S}{l}=\varepsilon_0\times\frac{S}{l}\times 2\times 3=6\,C_0$$

したがって，全体の静電容量 C は，

$$C=\frac{1}{\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}}=\frac{C_1 C_2}{C_1+C_2}=\frac{2C_0\times 6C_0}{2C_0+6C_0}=\frac{12C_0^2}{8C_0}=1.5\,C_0$$

$$=1.5\times 1=\mathbf{1.5}\ 〔\mathbf{\mu F}〕$$